MARIA PREDOI
DANA CONSTANTINESCU
MIHAELA RACILĂ

TEME DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

TEORIE ŞI APLICAŢII

Editura Universitaria Craiova

MARIA PREDOI
DANA CONSTANTINESCU
MIHAELA RACILĂ

TEME DE ANALIZĂ MATEMATICĂ TEORIE ŞI APLICAŢII

EDITURA UNIVERSITARIA
CRAIOVA, 2010

Referenți științifici:
Prof.univ.dr. Trandafir Balan
Prof.univ.dr.ing. Dan Popescu

Copyright © 2010 Universitaria
Toate drepturile sunt rezervate Editurii Universitaria

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

PREDOI, MARIA
Teme de analiză matematică : teorie și aplicații /
Maria Predoi, Dana Constantin, Mihaela Răcilă. - Craiova :
Universitaria, 2010
Bibliogr.
ISBN 978-606-510-233-0

I. Constantin, Dana
II. Răcilă, Mihaela

517

Apărut: 2010
Tipografia Universității din Craiova
Str. Brestei, nr.156A, Craiova, Dolj, România
Tel.: +40 251 598054
Tipărit în România

CUPRINS

Prefață 7

1. ȘIRURI ȘI SERII DE NUMERE REALE
1.1. Noțiuni teoretice și rezultate fundamentale 9
1.1.1. Șiruri de numere reale 9
1.1.2. Serii de numere reale 14
1.2. Tipuri de probleme și metode de rezolvare 27
1.3. Exerciții rezolvate 29
1.4. Exerciții propuse 43

2. SERII DE PUTERI REALE. DEZVOLTĂRI ÎN SERIE.
2.1. Noțiuni teoretice și rezultate fundamentale 49
2.1.1. Șiruri de funcții reale 49
2.1.2. Serii de funcții reale 52
2.1.3. Serii de puteri reale 54
2.1.4. Serii Taylor. Dezvoltări în serie 56
2.2. Tipuri de probleme și metode de rezolvare 59
2.3. Exerciții rezolvate 61
2.4. Exerciții propuse 67

3. FUNCȚII CONTINUE DE MAI MULTE VARIABILE REALE
3.1. Noțiuni teoretice și rezultate fundamentale 73
3.1.1. Spațiul euclidian $\mathbf{R}^p$ 73
3.1.2. Șiruri în $\mathbf{R}^p$ 76
3.1.3. Limita unei funcții de mai multe variabile 77
3.1.4. Funcții de mai multe variabile continue într-un punct 80

3.1.5. Funcţii continue pe o mulţime..... 81
3.1.6. Cazul funcţiilor vectoriale de variabilă vectorială..... 84
3.2. Tipuri de probleme şi metode de rezolvare..... 86
3.3. Exerciţii rezolvate..... 89
3.4. Exerciţii propuse..... 105

4. FUNCŢII DIFERENŢIABILE. EXTREME LOCALE.
4.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale..... 111
4.1.1. Diferenţiabilitatea funcţiilor reale de o variabilă reală..... 111
4.1.2. Cazul funcţiilor vectoriale de o variabilă reală..... 113
4.1.3. Cazul funcţiilor reale de variabilă vectorială (de mai multe variabile reale)..... 114
4.1.4. Cazul funcţiilor vectoriale de variabilă vectorială..... 123
4.2. Tipuri de probleme şi metode de rezolvare..... 125
4.3. Exerciţii rezolvate..... 127
4.4. Exerciţii propuse..... 144

5. FUNCŢII IMPLICITE. EXTREME CONDIŢIONATE.
5.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale..... 150
5.1.1. Funcţii implicite..... 150
5.1.2. Transformări punctuale în $\mathbf{R}^p$. Schimbări de coordonate..... 155
5.1.3. Extreme condiţionate. Puncte de extrem global..... 157
5.2. Tipuri de probleme şi metode de rezolvare..... 160
5.3. Exerciţii rezolvate..... 165
5.4. Exerciţii propuse..... 180

6. INTEGRALA SIMPLĂ.
INTEGRALA SIMPLĂ CU PARAMETRU.
6.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale..... 185
6.1.1. Metoda lui Darboux de a defini integrala simplă..... 185
6.1.2. Metoda lui Riemann de a defini integrala simplă..... 187
6.1.3. Clase de funcţii integrabile..... 188
6.1.4. Proprietăţi ale funcţiilor integrabile şi ale integralei..... 188
6.1.5. Metode de calcul al integralei simple..... 190
6.1.6. Aplicaţii ale integralei simple..... 197
6.1.7. Integrala simplă cu parametru..... 197

6.2. Tipuri de probleme şi metode de rezolvare..... 200
6.3. Exerciţii rezolvate..... 208
6.4. Exerciţii propuse..... 228

7. INTEGRALA IMPROPRIE. INTEGRALA IMPROPRIE CU PARAMETRU.
7.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale..... 237
7.2. Tipuri de probleme şi metode de rezolvare..... 251
7.3. Exerciţii rezolvate..... 258
7.4. Exerciţii propuse..... 281

8. INTEGRALA CURBILINIE DE PRIMUL TIP
8.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale..... 289
8.1.1. Drumuri şi curbe în $\mathbf{R}^p$..... 289
8.1.2. Drumuri rectificabile. Lungimea unui drum..... 292
8.1.3. Integrala curbilinie de primul tip..... 293
8.1.4. Aplicaţii ale integralei curbilinii de primul tip..... 295
8.2. Tipuri de probleme şi metode de rezolvare..... 297
8.3. Exerciţii rezolvate..... 299
8.4. Exerciţii propuse..... 309

9. INTEGRALE MULTIPLE
9.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale..... 315
9.1.1. Definiţia şi proprietăţile integralei duble..... 315
9.1.2. Calculul integralelor duble..... 319
9.1.3. Aplicaţii ale integralelor duble..... 321
9.1.4. Definiţia şi proprietăţile integralei triple..... 322
9.1.5. Calculul integralelor triple..... 325
9.1.6. Aplicaţii ale integralelor triple..... 326
9.2. Tipuri de probleme şi metode de rezolvare..... 328
9.3. Exerciţii rezolvate..... 334
9.4. Exerciţii propuse..... 362

10. INTEGRALA DE SUPRAFAŢĂ DE PRIMUL TIP
10.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale..... 372
10.1.1. Pânze şi suprafeţe netede..... 372

10.1.2. Aria unei suprafeţe 373
10.1.3. Integrala de suprafaţă de primul tip 374
10.1.4. Aplicaţii ale integralelor de suprafaţă de primul tip 376
10.2. Tipuri de probleme şi metode de rezolvare 377
10.3. Exerciţii rezolvate 378
10.4. Exerciţii propuse 388

11. INTEGRALA CURBILINIE ÎN RAPORT CU COORDONATELE. CÂMPURI DE GRADIENŢI.
11.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale 391
11.1.1. Elemente de teoria câmpurilor 391
11.1.2. Integrala curbilinie de al doilea tip 398
11.1.3. Independenţa de drum a integralelor curbilinii de al doilea tip. Caracterizarea câmpurilor de gradienţi 401
11.2. Tipuri de probleme şi metode de rezolvare 406
11.3. Exerciţii rezolvate 409
11.4. Exerciţii propuse 423

12. INTEGRALA DE SUPRAFAŢĂ DE AL DOILEA TIP. CÂMPURI SOLENOIDALE.
12.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale 431
12.1.1. Suprafeţe orientabile 431
12.1.2. Integrala de suprafaţă de al doilea tip 432
12.1.3. Formule integrale 435
12.1.4. Caracterizarea câmpurilor solenoidale 440
12.2. Tipuri de probleme şi metode de rezolvare 442
12.3. Exerciţii rezolvate 446
12.4. Exerciţii propuse 457

BIBLIOGRAFIE 463

PREFAŢĂ

Lucrarea se adresează studenţilor facultăţilor tehnice, studenţilor facultăţii de Fizică, precum si tuturor celor ce doresc să-şi însuşească sau să aprofundeze cunoştinţele de Analiză Matematică.

Scopul lucrării este prezentarea clară şi precisă a noţiunilor şi rezultatelor de bază ale Calculului diferenţial şi integral, descrierea şi exemplificarea principalelor metode de rezolvare a problemelor în aşa fel încât cunoştinţele să devină utilizabile din punct de vedere practic. De aceea, lucrarea are un pronunţat caracter metodic. Materialul prezentat este organizat in 12 teme care acoperă cunoştinţele predate şi seminarizate la disciplina fundamentală, obligatorie Analiză Matematică, prevăzută la unele dintre facultăţi, în noul plan de învăţământ, doar în semestrul I, anul I. Din această perspectivă lucrarea este un eficient suport pentru pregătirea seminariilor, temelor de casă şi examenelor.

Toate temele au organizare identică, fiind formate din patru secţiuni: în prima secţiune sunt prezentate principalele noţiuni teoretice şi rezultatele fundamentale ale temei prezentate, secţiunea a doua este dedicată identificării tipurilor de probleme şi prezentării metodelor de rezolvare a acestora, în secţiunea a treia aceste metode sunt exemplificate cu ajutorul exerciţiilor rezolvate, iar ultima secţiune conţine exerciţii propuse însoţite de răspunsuri şi indicaţii de rezolvare.

O atenţie deosebită este acordată interpretării noţiunilor introduse şi prezentării unor situaţii în care ele sunt folosite.

Exerciţiile rezolvate şi propuse au grade diferite de dificultate, dând rezolvitorilor posibilitatea să îşi formeze deprinderi de calcul, să aprofundeze cunoştinţele sau să caute rezolvări deosebite.

Prin această configuraţie a temelor se urmăreşte asimilarea conştientă a materialului prezentat şi operaţionalizarea sa, în aşa fel încât cititorul sa fie capabil să îşi folosească cunoştinţele în contexte variate.

Pentru a crea o punte de legătură între domeniul relativ abstract al analizei matematice si ştiinţele aplicate, sunt prezentate aplicaţii ale cunoştinţelor studiate în alte domenii decât matematica (fizică, mecanică, inginerie).

Considerăm că această structură de prezentare va contribui la o mai bună şi temeinică pregătire a celor interesaţi, studenţi sau utilizatori ai matematicii.

Lucrarea este rodul activităţii didactice şi ştiinţifice a autoarelor, desfăşurate în Departamentul de Matematici Aplicate al Universităţii din Craiova, precum şi al unei colaborări continue şi fructuoase cu titularii disciplinelor de specialitate de la Facultatea de Fizică si facultăţile tehnice.

Mulţumim tuturor celor care, prin sugestii şi completări, au contribuit la realizarea acestei lucrări, în special referenţilor pentru observaţiile şi aprecierile făcute cu ocazia analizei manuscrisului.

1. ŞIRURI ŞI SERII DE NUMERE REALE

1.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale.

1.1.1. Şiruri de numere reale.

Presupunem cunoscute noţiunile de bază despre mulţimea $\mathbf{N}$ a numerelor naturale, mulţimea $\mathbf{Z}$ a numerelor întregi, mulţimea $\mathbf{Q}$ a numerelor raţionale şi mulţimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale.

Reamintim că pe $\mathbf{R}$ se poate defini o structură algebrică de corp comutativ total ordonat la fel ca în $\mathbf{Q}$ dar cele două mulţimi se deosebesc esenţial prin funcţionarea în $\mathbf{R}$ a axiomei marginii superioare, care constituie punctul de plecare în stabilirea tuturor rezultatelor profunde ale analizei.

Reamintim că definind *modulul* unui număr real x astfel:

$$|x| = max\{x, -x\} = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

se verifică imediat următoarele proprietăţi:

$[N_1]$ $|x| \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$[N_2]$ $|x + y| \leq |x| + |y|$ pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$

$[N_3]$ $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$

De asemenea, definind funcţia $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ prin

$$d(x, y) = |x - y|$$

se verifică imediat, folosind $[N_1]$, $[N_2]$, $[N_3]$, următoarele proprietăţi:

$[D_1]$ $d(x, y) \geq 0$ pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$[D_2]$ $d(x, y) = d(y, x)$ pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$

$[D_3]$ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbf{R}$

Numărul real şi pozitiv $d(x, y)$ este numit *distanţa euclidiană* între numerele x, y, funcţia d se numeşte metrică, iar $(\mathbf{R}, d)$ este un spaţiu metric. Utilizând această noţiune se poate exprima cât de "apropiate" sunt două numere reale şi se poate introduce noţiunea de şir convergent de numere reale, cunoscută din liceu, pe care o vom reaminti, precum şi noţiunea de şir fundamental de numere reale pe care o vom prezenta în continuare.

Definiţia 1.1.1.1. Se numeşte *şir de numere reale* orice funcţie $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$; pentru orice $n \in \mathbf{N}$ este definit un număr real $x_n = f(n)$ numit *termenul de rang n*, sau *termenul general al şirului*; şirul însuşi se notează $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$, iar mulţimea $\{x \in \mathbf{R} : \exists\ n\in \mathbf{N},\ x = x_n\}$ se numeşte *mulţimea termenilor şirului*.

Observaţia 1.1.1.1. Trebuie făcută distincţia între un şir şi mulţimea termenilor lui, deoarece două şiruri distincte pot avea aceeaşi mulţime de termeni. De exemplu, $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$, $f(n) = (-1)^n$ şi $g: \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$, $g(n) = (-1)^{n+1}$ sunt două şiruri distincte cu aceeaşi mulţime de termeni $\{-1, 1\}$.

Definiţia 1.1.1.2. Şirul $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$ de numere reale se numeşte *convergent* dacă există $x\in \mathbf{R}$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, încât, oricare ar fi $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \varepsilon$ adică $d(x_n, x) < \varepsilon$. Elementul x se numeşte *punct limită* pentru şirul $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$. În caz contrar, şirul $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$ se numeşte *divergent*.

Dacă $x\in \mathbf{R}$ este punct limită pentru şirul $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$ se mai spune că acest şir *converge la x*, sau că *x este limita şirului* şi se notează $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Definiţia 1.1.1.3. Fie $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f(n) = x_n$ un şir de numere reale.
Fie $h: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $h(m) = n_m$ un şir strict crescător de numere naturale. Funcţia $\varphi = f \circ h$ se numeşte *subşir* al şirului f.

Evident, $\varphi: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $\varphi(m) = f(h(m)) = f(n_m) = x_{n_m}$ iar $n_m \geq m$ pentru orice $m\in \mathbf{N}$.

Definiţia 1.1.1.4. Fie $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f(n) = x_n$ un şir de numere reale. Elementul $x \in \mathbf{R}$ se numeşte *punct de acumulare* pentru şirul f dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $m \in \mathbf{N}$ există $n_m \geq m$ încât $| x_{n_m} - x| < \varepsilon$ adică $d(x_{n_m}, x) < \varepsilon$.

Observaţia 1.1.1.2. a) Se poate demonstra că $x \in \mathbf{R}$ este punct de acumulare pentru un şir f de numere reale dacă şi numai dacă există un subşir al acestuia care are limita x (*lema lui Cesaro*). Este evident că orice punct limită pentru un şir este punct de acumulare pentru acesta. Reciproca acestei afirmaţii nu este, în general, adevărată. De exemplu, şirul $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbf{N}^*$ are două puncte de acumulare (-1 şi 1) dar nu are nici un punct limită.

b) Un şir convergent de numere reale are un singur punct de acumulare (limita şirului); dacă $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f(n) = x_n$ este un şir mărginit de numere reale, iar $\gamma(f)$ este mulţimea punctelor de acumulare ale şirului f, se poate demonstra că $\gamma(f) \neq \emptyset$, aceasta fiind consecinţă a axiomei marginii superioare, extrem de importantă în demonstraţia teoremei 1.1.1.1. În $\overline{\mathbf{R}}$, $\gamma(f)$ are întotdeauna margine inferioară şi margine superioară. Se notează $\underline{\lim}\ x_n = inf\, \gamma(f)$ şi se numeşte *limita inferioară* a şirului f; analog, $\overline{\lim}\ x_n = sup\ \gamma(f)$ se numeşte *limita superioară* a şirului f. Se poate arăta că un şir mărginit de numere reale este convergent dacă şi numai dacă

$$\underline{\lim}\ x_n = \overline{\lim}\ x_n$$

c) Proprietăţile specifice legate, fie de structura algebrică a lui $\mathbf{R}$ fie de proprietatea de a fi o mulţime total ordonată sunt cunoscute, în mare parte, din liceu şi au mai mică importanţă pentru demersul nostru. De aceea vom prezenta aici doar proprietăţile şirurilor de numere reale legate de completitudinea lui $\mathbf{R}$, foarte importante în practică şi nestudiate în liceu.

Definiţia 1.1.1.5. Fie $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f(n) = x_n$ un şir de numere reale. Şirul f se numeşte *şir fundamental* (sau şir *Cauchy*) dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ încât dacă $n, m \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ şi $m \geq n_0$ atunci $|x_n - x_m| < \varepsilon$ adică $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ sau, echivalent, $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_0$ şi orice $p \in \mathbf{N}$.

Observaţia 1.1.1.3. În definiţia convergenţei unui şir apare în mod explicit limita şirului, pe când în definiţia unui şir fundamental intervin numai termeni ai şirului, deci aceasta din urmă este o definiţie intrinsecă. Determinarea limitei este dificilă, în multe situaţii imposibilă. Prin urmare, teorema următoare este extrem de importantă:

Teorema 1.1.1.1. *(criteriul general de convergenţă al lui Cauchy)*
Un şir de numere reale este convergent dacă şi numai dacă el este un şir fundamental. (Se spune că $\mathbf{R}$, în raport cu distanţa euclidiană este spaţiu metric complet)

Observaţia 1.1.1.4. Având în vedere această teoremă, pentru testarea convergenţei unui şir de numere reale, este suficient să se verifice condiţia intrinsecă de a fi şir fundamental. Apoi definiţia 1.1.1.2. arată că $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dacă şi numai dacă $\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$, deci putem aproxima $x \approx x_n$ şi aproximarea este cu atât mai bună cu cât rangul n este mai mare. Referitor la evaluarea erorii cu care se face această aproximare, putem preciza următoarele: dacă $|x_{n+p} - x_n| \leq y_n$ pentru orice n, $p \in \mathbf{N}$ şi $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ atunci şirul $(x_n)_n \in \mathbf{N}$ este fundamental, deci convergent; dacă $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ se poate arăta că $|x_n - x| \leq y_n$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$ inegalitate care poate fi considerată formulă de evaluare a erorii cu care se face aproximarea $x \approx x_n$. Evident, dacă se impune ca eroarea să fie mai mică decât ε dat, se va determina cea mai mică valoare n_ε a lui n pentru care $y_n < \varepsilon$ şi se va aproxima $x \approx x_n$.

Exemplul 1.1.1.1. Fie $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$, $f(n) = a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Deoarece

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} \geq \underbrace{\frac{1}{n+n} + \ldots + \frac{1}{n+n}}_{\text{de } n \text{ ori}} = \frac{1}{2}$$

pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, rezultă că şirul f nu este fundamental, deci nici convergent.

Exemplul 1.1.1.2. Fie $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}, f(n) = a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k!}{k(k+1)}$.

Deoarece $|a_{n+p} - a_n| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} \frac{\sin k!}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k!}{k(k+1)} \right| =$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{k=n+p} \frac{\sin k!}{k(k+1)} \right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\sin k!|}{k(k+1)} \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}$, pentru orice $n, p \in \mathbf{N}^*$ şi $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$,

deducem că şirul f este şir fundamental, deci convergent. Prin urmare, există şi este unic $a \in \mathbf{R}$, $a = \lim_{n \to \infty} a_n$, dar a nu se poate determina cu exactitate.

Pentru a determina o valoare aproximativă, cu o eroare mai mică decât 10^{-3} (de exemplu) observăm că $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{10^3} \Leftrightarrow n + 1 > 10^3 \Leftrightarrow n > 10^3 - 1$.

Prin urmare, cel mai mic n pentru care $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{10^3}$ este 10^3. Deci $a \approx a_{1000}$

Se poate demonstra că pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$, intervalele $(-\infty, a]$, $[a, b]$, $[a, \infty)$ sunt spaţii metrice *complete* în raport cu metrica euclidiană.

Fie X unul dintre aceste intervale sau $\mathbf{R}$. Funcţia $f: X \to X$ se numeşte *contracţie* dacă există $c \in [0, 1)$ numit *coeficient de contracţie* astfel încât $d(f(x), f(y)) \le c \cdot d(x, y)$ pentru orice $x, y \in X$.

Utilizând teorema 1.1.1.1. reformulată pentru X se poate demonstra următorul rezultat important cunoscut sub numele de *Teorema de punct fix a lui Banach* sau *Principiul contracţiei* :

Teorema 1.1.1.2. Pentru orice contracţie $f: X \to X$ există şi este unic un punct $\xi \in X$ astfel încât $f(\xi) = \xi$.

Punctul ξ se numeşte *punct fix* al aplicaţiei *f*. Trebuie reţinută metoda de determinare a punctului fix cunoscută sub numele de metoda aproximaţiilor succesive: prima aproximaţie $x_0 \in X$ este aleasă arbitrar, apoi aproximaţiile $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ..., $x_n = f(x_{n-1})$, ...sunt determinate succesiv folosind *f*; se demonstrează că $|x_n - x_{n+p}| \leq \frac{\delta}{1-c} \cdot c^n$, pentru orice *n*, $p \in \mathbf{N}$, unde c este coeficientul de contracţie, $\delta = d(x_0, x_1) = |x_0 - x_1|$; indiferent de alegerea lui x_0, şirul de aproximaţii succesive $(x_n)_n \in \mathbf{N}$ converge la aceeaşi limită ξ. Formula precisă $\xi = \lim_{n \to \infty} x_n$ este înlocuită în practică prin formula de aproximare $\xi \approx x_n$. Pentru a evalua eroarea care apare în această aproximare, se poate arăta că $|x_n - \xi| \leq \frac{\delta}{1-c} \cdot c^n$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$, şi se raţionează apoi ca în observaţia 1.1.1.4.

1.1.2. Serii de numere reale.

Noţiunea de serie de numere reale a apărut din necesitatea de a da un sens natural sumei termenilor unui şir de numere reale. Deoarece nu se pot aduna (în sens algebric) o infinitate de numere reale, realizarea acestui scop a fost posibilă numai cu ajutorul noţiunii de limită, numai în anumite cazuri, studiul seriilor îmbinând studiul sumelor finite cu cel al limitelor de şiruri.

Definiţia 1.1.2.1. Fie $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f(n) = x_n$ un şir de numere reale. Fie $g: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $g(n) = s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$. Perechea de şiruri *(f, g)* se numeşte *serie generată de şirul f*. Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$, s_n se numeşte *suma parţială de ordin n* a seriei, iar şirul *g* se numeşte *şirul sumelor parţiale asociat şirului f*. Seria *(f, g)* se numeşte *convergentă* dacă şirul *g* al sumelor parţiale este convergent şi *divergentă* în caz contrar. Dacă seria *(f, g)* este

convergentă, se defineşte *suma seriei* ca fiind numărul real $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ şi se notează $s = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$.

Observaţia 1.1.2.1. a) Deşi poate crea confuzii, notaţia $\sum_{n\geq 0} x_n$ pentru seria *(f, g)* este frecvent folosită. Trebuie însă mereu făcută distincţia între seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ şi suma sa, $s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$, care este un element asociat seriei numai în caz de convergenţă şi care reprezintă suma termenilor şirului dat. În cazul în care seria este divergentă, nu putem atribui nici un sens sumei termenilor şirului care generează seria.
b) În studiul unei serii, rolul principal este jucat de şirul sumelor parţiale, care sunt sume finite. Prin trecerea la limită însă, se pierd o seamă de proprietăţi ale sumelor finite. Astfel, la sumele seriilor nu avem comutativitate, asociativitate, seriile nu pot fi, în general, înmulţite.
c) Dacă se renunţă la un număr finit de termeni ai unei serii (sau dacă se adaugă un număr finit de termeni) seria nou obţinută va avea aceeaşi natură ca şi seria iniţială. În caz de convergenţă, suma se modifică scăzând (sau adăugând) suma finită a termenilor la care se renunţă (respectiv, care se adaugă)
d) Problema principală în studiul unei serii este determinarea naturii şi, în caz de convergenţă, evaluarea exactă sau măcar aproximativă a sumei seriei respective.

Exemplul 1.1.2.1. Seria $\sum_{n\geq 0} q^n$, unde $q \in \mathbf{R}$ este fixat, se numeşte *serie geometrică de raţie q*. Sumele parţiale asociate sunt:

$$s_0 = 1,\ s_1 = 1 + q,\ s_2 = 1 + q + q^2,\ \ldots,\ s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n,\ \ldots$$

Se demonstrează prin inducţie că:

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, q \neq 1 \\ n+1 \quad , q = 1 \end{cases}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbf{N}$$

Deoarece $\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$ dacă şi numai dacă $q \in (-1, 1)$, rezultă că seria geometrică de raţie q este convergentă dacă şi numai dacă $|q| < 1$ şi, în acest caz, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

Exemplul 1.1.2.2. Seria $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ se numeşte *serie armonică*. Sumele parţiale sunt: $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \dfrac{1}{2}$, $s_3 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$, ..., $s_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$,... Deoarece $s_{2n} - s_n \geq \dfrac{1}{2}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ (vezi exemplul 1.1.1.1.) rezultă că şirul $(s_n)_{n\in N^*}$ al sumelor parţiale nu este şir fundamental, deci nici convergent. Rezultă că seria armonică este divergentă.

Exemplul 1.1.2.3. Să considerăm acum seria $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\sin n!}{n(n+1)}$. Şirul sumelor parţiale are în acest caz termenul general $s_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sin k!}{k(k+1)}$, $n \in \mathbf{N}^*$. Acest şir a fost studiat în exemplul 1.1.1.2 unde s-a arătat că este şir fundamental, deci convergent. Rezultă că seria $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\sin n!}{n(n+1)}$ este convergentă.

Observaţia 1.1.2.2. În exemplul 1.1.2.1. am putut determina natura şi chiar suma seriei considerate exprimând convenabil termenul general al şirului sumelor parţiale. Acest lucru nu este posibil întotdeauna. În exemplul 1.1.2.2. se deduce că seria este divergentă, fără a găsi o formă convenabilă pentru s_n. În exemplul 1.1.2.3. se deduce că seria este convergentă, dar nu se poate găsi o expresie convenabilă pentru s_n şi, prin urmare, nu se poate cunoaşte cu exactitate suma seriei.

Este necesară, deci, dezvoltarea unei teorii calitative a seriilor, indicând criterii de convergenţă care ţin cont de forma termenului general al seriei studiate. Pentru o serie care se dovedeşte a fi convergentă (în urma aplicării unui criteriu de convergenţă) se aproximează suma seriei cu o sumă parţială de un ordin convenabil ales (în funcţie de eroarea permisă de problemă)

Teorema 1.1.2.1. *(criteriul necesar de convergenţă)*

Dacă seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este convergentă atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Observaţia 1.1.2.3. Condiţia din teorema 1.1.2.1. este doar necesară, dar nu şi suficientă pentru convergenţa unei serii. De exemplu, şirul $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$, $f(n) = \frac{1}{n}$ este convergent şi are limita zero, dar seria generată de acest şir (seria armonică) nu este convergentă. Din teoremă rezultă imediat că, dacă un şir f este divergent sau este convergent cu limita diferită de zero, atunci seria generată de şirul f este divergentă. De exemplu, seria $\sum_{n\geq 2} \sqrt[n]{n}$ este divergentă deoarece $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; seria $\sum_{n\geq 1} (-1)^n$ este divergentă deoarece şirul $((-1)^n)_{n\in N^*}$ nu are limită.

Teorema 1.1.2.2. a) Dacă $\lambda \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, seria $\sum_{n\geq 0}\lambda x_n$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n\geq 0} x_n$;

b) Dacă seriile $\sum_{n\geq 0} x_n$, $\sum_{n\geq 0} y_n$ sunt convergente, cu sumele s, respectiv σ, atunci seriile $\sum_{n\geq 0}(x_n + y_n)$, $\sum_{n\geq 0}(x_n - y_n)$ sunt convergente, cu sumele $s + \sigma$, respectiv $s - \sigma$.

Teorema 1.1.2.3. *(criteriul general de convergenţă al lui Cauchy pentru serii)*

Seria de numere reale $\sum_{n\geq 0} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ astfel încât oricare ar fi $n \geq n_0$ şi oricare ar fi $p \in \mathbf{N}^*$ să avem:

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}| < \varepsilon$$

Observând că $x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p} = s_{n+p} - s_n$, esenţa demonstraţiei constă în aplicarea criteriului general de convergenţă al lui Cauchy şirului sumelor parţiale. (vezi şi exemplele 1.1.1.2. şi 1.1.2.3.)

O clasă foarte importantă de serii o constituie seriile absolut convergente.

Definiţia 1.1.2.2. Fie $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f(n) = x_n$. Seria de numere reale $\sum_{n\geq 0} x_n$ se numeşte *absolut convergentă* dacă seria de numere reale pozitive $\sum_{n\geq 0} |x_n|$ este convergentă.

Teorema 1.1.2.4. Orice serie absolut convergentă de numere reale este convergentă.

Observaţia 1.1.2.4. Reciproca acestei teoreme nu este, în general, adevărată. Există serii convergente care nu sunt absolut convergente. De exemplu, seria $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$ numită *serie armonică alternată* , este convergentă (vezi exemplul 1.1.2.5) dar nu este absolut convergentă deoarece $|x_n| = \frac{1}{n}$, $n\in \mathbf{N}^*$ iar $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ este divergentă (vezi exemplul 1.1.2.2.)

Definiţia 1.1.2.3. O serie care este convergentă, dar nu este absolut convergentă, se numeşte *semiconvergentă.*

Seria armonică alternată este un exemplu de serie semi-convergentă.

Seriile semiconvergente au o proprietate ce le face puţin utilizabile, cunoscută sub numele de *teorema lui Riemann* : dacă seria de numere reale *(f, g)*, $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$, $f(n) = x_n$ este semiconvergentă, există o permutare σ a mulţimii $\mathbf{N}$, astfel încât seria generată de şirul $f\circ\sigma:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$, $(f\circ\sigma)(n)=x_{\sigma(n)}$ să fie divergentă; pentru orice $\alpha\in\mathbf{R}$ există o permutare τ a lui $\mathbf{N}$ astfel încât seria generată de şirul $f\circ\tau:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$, $(f\circ\tau)(n) = x_{\tau(n)}$ să fie convergentă şi să aibă suma α.

Rezultă, de aici, că seriile semiconvergente au o comportare foarte diferită de cea a sumelor finite.

Spre deosebire de acestea, dacă într-o serie absolut convergentă modificăm ordinea termenilor, nici natura, nici suma seriei nu se schimbă (*teorema lui Dirichlet*)

Astfel, seriile absolut convergente au o comportare asemănătoare cu cea a sumelor finite; de aceea ele sunt cele mai des utilizate.

Studiul seriilor absolut convergente înseamnă de fapt studiul seriilor *cu termeni pozitivi.* Pentru asemenea serii se pot formula multe criterii care dau condiţii suficiente de convergenţă. Prezentăm în continuare pe cele mai importante.

Teorema 1.1.2.5. O serie de numere reale şi pozitive este convergentă, dacă şi numai dacă, şirul sumelor ei parţiale este mărginit.

Teorema 1.1.2.6. *(criteriul comparaţiei)* Fie $\sum_{n\geq 0} x_n$ şi $\sum_{n\geq 0} y_n$ două serii cu termeni pozitivi astfel încât să existe $l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$.

a) dacă $0 < l < \infty$ atunci cele două serii au aceeaşi natură;

b) dacă $l = 0$ şi $\sum_{n\geq 0} y_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este convergentă;

c) dacă $l = \infty$ şi $\sum_{n\geq 0} y_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este divergentă.

Teorema 1.1.2.7. *(criteriul rădăcinii al lui Cauchy)*

Fie $\sum_{n\geq 0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă există $n_0 \in \mathbf{N}$ şi $q \in (0, 1)$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $\sqrt[n]{x_n} \leq q$, atunci seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este convergentă.

b) Dacă $\sqrt[n]{x_n} \geq 1$ pentru o infinitate de indici, atunci seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este divergentă.

Corolar. Fie $\sum_{n\geq 0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Presupunem că există $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

a) Dacă $l < 1$, atunci seria este convergentă.
b) Dacă $l > 1$, atunci seria este divergentă.

Teorema 1.1.2.8. *(criteriul raportului, al lui d'Alembert)*

Fie $\sum_{n\geq 0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă există $n_0 \in \mathbf{N}$ şi $q \in (0, 1)$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ să avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q$, atunci seria este convergentă.

b) Dacă există $n_0 \in \mathbf{N}$ şi $q \in (0, 1)$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ atunci seria este divergentă.

Corolar. Fie $\sum_{n\geq 0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Presupunem că există $l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

a) Dacă $l < 1$, atunci seria este convergentă.
b) Dacă $l > 1$, atunci seria este divergentă.

Observatia 1.1.2.5. Dacă $l = 1$ în corolarul teoremei 1.1.2.7. (sau 1.1.2.8.) nu se poate trage nici o concluzie asupra naturii seriei. Spre exemplu, să considerăm seriile $\sum_{n\geq 1} x_n$, $\sum_{n\geq 1} y_n$ unde $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Evident că $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = 1$.

Seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ este divergentă (vezi exemplul 1.1.2.2.). Seria $\sum_{n\geq 1} y_n$ este însă convergentă. (Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$, $y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ şi, prin urmare, $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$)

În situaţiile în care criteriul raportului nu poate decide natura seriei se poate folosi:

Teorema 1.1.2.9. *(criteriul lui Raabe - Duhamel)*

Fie $\sum_{n\geq 0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă există $n_0 \in \mathbf{N}^*$ şi $r > 1$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \geq r$, atunci seria este convergentă.

b) Dacă există $n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, atunci seria este divergentă.

Corolar. Fie $\sum_{n\geq 0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Presupunem că există $l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$.

a) Dacă $l > 1$, atunci seria este convergentă.

b) Dacă $l < 1$, atunci seria este divergentă.

Exemplul 1.1.2.4. Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 0$ se numeşte *serie armonică generală*. Este evident că $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ pentru orice $\alpha > 0$, deci natura seriei nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului raportului (şi nici cu criteriul rădăcinii). Dar

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) = n\left[\frac{(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}}-1\right] = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1}{\frac{1}{n}}.$$

Se ştie din liceu că $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha$ pentru orice $\alpha\in\mathbf{R}$. Folosind *criteriul cu şiruri* al limitei unei funcţii (de asemenea, cunoscut din liceu) deoarece $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, rezultă că:

$$l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1}{\frac{1}{n}} = \alpha$$

Rezultă astfel că pentru $\alpha > 1$ seria armonică generală este convergentă, iar pentru $\alpha < 1$ este divergentă. Pentru $\alpha = 1$ se obţine seria armonică despre care s-a arătat anterior (vezi exemplul 1.1.2.2.) că este divergentă.

Teorema 1.1.2.10. *(criteriul integral al lui Cauchy)* Fie $f:[0, \infty)\to[0, \infty)$ o funcţie continuă, descrescătoare şi fie $x_n = f(n)$, $n\in\mathbf{N}$. Seria cu termeni pozitivi $\sum_{n\geq 0} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $F : \mathbf{N}\to\mathbf{R}$,

$F(n) = \int_0^n f(x)dx$ este mărginit.

Observaţia 1.1.2.6. Teorema rămâne valabilă şi în cazul în care $f: [a, \infty) \to \mathbf{R}^+$, unde $a > 0$.

Cu ajutorul acestui criteriu putem stabili foarte uşor natura seriei armonice generale (studiată în exemplul 1.1.2.4). Este suficient să considerăm funcţia $f: [1, \infty) \to \mathbf{R}^+$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$ şi să observăm că, pentru $\alpha \neq 1$, $F(n) = \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right)$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$. Dacă $\alpha > 1$, avem: $F(n) = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) < \frac{1}{\alpha-1}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$. Prin urmare, şirul F este mărginit, deci seria este convergentă. Dacă $\alpha < 1$, avem: $F(n) = \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right)$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ şi $\lim_{n\to\infty} F(n) = \infty$ deci şirul F nu este mărginit, deci seria este divergentă.

Pentru studiul unei serii care *nu este absolut convergentă* se poate folosi direct criteriul general al lui Cauchy (teorema 1.1.2.3.) sau următoarea teoremă care se demonstrează cu ajutorul acestuia.

Teorema 1.1.2.11. *(criteriul lui Abel)* Fie $(z_n)_n \in \mathbf{N}$ un şir de numere reale având şirul sumelor parţiale asociat mărginit. Fie $(a_n)_n \in \mathbf{N}$ un şir de numere reale, descrescător şi convergent către zero. Atunci seria $\sum_{n\geq 0} a_n z_n$ este convergentă.

Corolar. *(criteriul lui Leibnitz pentru serii alternate)*
Fie $(a_n)_{n\in \mathbf{N}}$ un şir de numere reale, descrescător şi convergent către zero. Atunci seria $\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ este convergentă. (o asemenea serie se numeşte *serie alternată*)

Exemplul 1.1.2.5. Seria $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha}}$, unde $\alpha > 0$ este convergentă, fără a fi absolut convergentă pentru $0 < \alpha \leq 1$; pentru $\alpha > 1$ această serie este şi convergentă şi absolut convergentă (convergenţa se poate deduce din convergenţa absolută, sau, direct, cu criteriul lui Leibnitz)

Observaţia 1.1.2.7. Pentru o serie care s-a dovedit a fi convergentă, dar nu este posibil să-i determinăm suma, este important să putem evalua eroarea făcută, dacă se aproximează suma seriei cu o sumă parţială. Sunt situaţii în care se poate evalua uşor această eroare şi, prin urmare, se poate obţine suma seriei cu precizia dorită:
a) dacă $|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}| \leq y_n$ pentru orice n, $p\in \mathbf{N}$ şi $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ atunci seria este convergentă (rezultă din teorema 1.1.2.3.). Se poate arăta că $|s_n - s| \leq y_n$ pentru orice $n\in \mathbf{N}$, inegalitate care poate fi considerată formulă de evaluare a erorii cu care se face aproximarea $s \approx s_n$ (vezi şi observaţia 1.1.1.4.).
b) dacă există $q\in (0, 1)$ şi $n_0\in \mathbf{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $\sqrt[n]{|x_n|} \leq q$, atunci aplicând criteriul rădăcinii seriei $\sum_{n\geq 0}|x_n|$ se deduce că seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este absolut convergentă, deci şi convergentă. Se poate arăta că, pentru orice $n \geq n_0$, $|s_n - s| \leq \frac{q^{n+1}}{1-q}$.

c) dacă există $q \in (0, 1)$ şi $n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq q$, atunci aplicând criteriul raportului seriei $\sum_{n\geq 0} |x_n|$ se deduce că seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este absolut convergentă, deci şi convergentă. Se poate arăta că, pentru orice $n \geq n_0$, $|s_n - s| \leq |x_n| \cdot \frac{q}{1-q}$.

d) pentru o serie alternată $\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} a_n$ convergentă se poate arăta că:

$$0 < s_{2n} - s < a_{2n+1},\ 0 < s - s_{2n+1} < a_{2n+2}$$

pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Deci, dacă aproximăm suma s a unei serii alternate ce satisface condiţiile criteriului lui Leibniz cu suma parţială de ordinul n, facem o eroare mai mică decât primul termen neglijat; eroarea este prin lipsă dacă n este impar şi prin adaos, dacă n este par.

Operaţiile cu serii convergente puse în evidenţă în teorema 1.1.2.2. pot fi definite într-un cadru mai general şi anume într-un spaţiu vectorial normat.

Deoarece $\mathbf{R}$ este înzestrat cu o operaţie multiplicativă internă, este posibil să definim, pentru două serii de numere reale, seria produs.

Definiţia 1.1.2.4. Dacă $f_1, f_2 : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f_1(n) = u_n$, $f_2(n) = v_n$ sunt două şiruri de numere reale, se numeşte *convoluţia* şirurilor f_1 şi f_2 şirul $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f(n) = x_n = u_0v_n + u_1v_{n-1} + u_2v_{n-2} + \ldots + u_{n-1}v_1 + u_nv_0$. Se notează $f = f_1 * f_2$. Seria generată de şirul f se numeşte *seria produs* a seriilor generate de şirurile f_1, respectiv f_2.

În general, seria produs a două serii convergente nu este convergentă: dacă $f(n) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbf{N}^*$, atunci seria produs generată de şirul $f * f$ este divergentă (vezi exerciţiul 1.3.8.).

Pentru serii absolut convergente însă, are loc:

Teorema 1.1.2.12. Fie $f_1, f_2 : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, două şiruri arbitrare de numere reale. Dacă seriile generate de şirurile f_1, respectiv f_2, sunt absolut convergente, având sumele s, respectiv σ, atunci seria produs a lor este absolut convergentă, având suma $s \cdot \sigma$.

Pe lângă teorema lui Riemann şi teorema lui Dirichlet, această teoremă ne furnizează încă o deosebire esenţială între seriile semiconvergente şi cele absolut convergente.

1.2. Tipuri de probleme şi metode de rezolvare.

Exerciţiul 1.2.1. Să se stabilească dacă şirul cu termenul general $x_n = \ldots$ este sau nu fundamental.

Pentru a arăta că şirul este fundamental :

- Se determină şirul $(y_n)_n \in \mathbf{N}$ astfel încât $| x_{n+p} - x_n | \le y_n$ pentru orice $n, p \in \mathbf{N}$ şi $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

Pentru a arăta că şirul nu este fundamental:

- Se arată că şirul nu este mărginit

sau

- Pentru orice $n \in \mathbf{N}$ se determină $p(n) \in \mathbf{N}$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} | x_{n+p(n)} - x_n | \neq 0$$

Exerciţiul 1.2.2. Să se studieze convergenţa şirului cu termenul general $x_n = \ldots$

Pentru a arăta că şirul este convergent

- Se arată că este monoton şi mărginit

sau

- Se arată că este şir fundamental

Pentru a arăta că şirul nu este convergent

- Se arată că există subşiruri ale sale cu limite diferite

sau

- Se arată că nu este mărginit

sau

- Se arată că nu este fundamental.

Exerciţiul 1.2.3. Să se aproximeze limita şirului cu termenul general x_n=... cu eroare mai mică decât ε = ...

- Vezi observaţia 1.1.1.4. şi exemplul 1.1.1.2.

Exerciţiul 1.2.4. Folosind principiul contracţiei, să se determine soluţia ecuaţiei $g(x) = 0$ cu k zecimale exacte.

- se determină un interval X al lui $\mathbf{R}$ care este spaţiu metric complet şi în care ecuaţia are o soluţie ξ;
- se scrie ecuaţia sub forma $f(x) = x$, unde f este o contracţie a lui X;
- se determină un coeficient de contracţie c al lui f pe X, de exemplu $c = sup\{|f'(x)|; x \in X\}$ dacă f este derivabilă pe X şi $0 < c < 1$;
- se alege $x_0 \in$ X, se calculează $x_1 = f(x_0)$ şi $\delta = |x_1 - x_0|$;
- se determină cea mai mică valoare $n_0 \in \mathbf{N}$ a lui n pentru care $\frac{\delta}{1-c} \cdot c^n < 10^{-k}$;
- se realizează aproximarea $\xi \approx x_{n_0}$.

Exerciţiul 1.2.5. Să se determine limitele extreme ale şirului cu termenul general x_n = ...

- se determină mulţimea punctelor de acumulare ale şirului dat, determinând limitele în $\overline{\mathbf{R}}$ ale subşirurilor componente;
- se determină marginea superioară şi marginea inferioară a acestei mulţimi

Exerciţiul 1.2.6. Să se studieze natura seriei $\sum_{n\geq 0} x_n$ unde x_n = ... şi să se calculeze suma sa în caz de convergenţă.

În exerciţiile din această categorie, sumele parţiale au o expresie analitică simplă şi se poate realiza efectiv studiul convergenţei şirului $(s_n)_n \in \mathbf{N}$. Pentru rezolvare, se procedează astfel:

- se scrie s_n

- se prelucrează s_n , de exemplu prin descompunerea lui x_n în fracţii simple sau prin utilizarea unor formule cunoscute, obţinându-se o expresie analitică simplă
- se studiază convergenţa şirului $(s_n)_n \in \mathbf{N}$ determinând, dacă există, limita sa, care, dacă este finită, reprezintă suma seriei.

Exerciţiul 1.2.7. Să se studieze natura seriei generată de şirul $x_n = \ldots$, $n \in \mathbf{N}$

În acest tip de probleme sumele parţiale nu au expresii analitice simple, iar studiul direct al şirului $(s_n)_n \in \mathbf{N}$ nu este posibil. De aceea, pentru studiul seriei date, se încearcă aplicarea unui criteriu de convergenţă convenabil:

- dacă seria are toţi termenii pozitivi, se încearcă aplicarea unui criteriu adecvat pentru seri cu termeni pozitivi;
- dacă seria are termeni arbitrari, se studiază convergenţa absolută; dacă seria este absolut convergentă, atunci este şi convergentă, iar dacă nu este absolut convergentă, nu se poate spune nimic, în general, despre convergenţa sa, încercându-se în acest caz aplicarea criteriului lui Abel sau Leibniz;
- dacă $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$, atunci seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este divergentă.

Exerciţiul 1.2.8. Să se aproximeze suma seriei $\sum_{n\geq 0} x_n$ cu eroare mai mică decât 10^{-k}.

Vezi observaţia 1.1.2.7.; se determină cel mai mic $n_0 \in \mathbf{N}$ pentru care $y_n < 10^{-k}$ şi s_{n_0} va fi o aproximaţie a lui s cu eroare mai mică decât 10^{-k} (y_n este termenul general al şirului care apare în formula de evaluare a erorii)

1.3. Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 1.3.1. Stabiliţi dacă următoarele şiruri sunt fundamentale:

a) $x_n = \dfrac{n+2}{3n+5}$, $n \in \mathbf{N}$

b) $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}, n \in \mathbf{N}^*$

c) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbf{N}^*$

d) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}, n \in \mathbf{N}$

e) $x_n = \frac{n^2}{n+1}, n \in \mathbf{N}$

Soluţii

a) $|x_{n+p} - x_n| = \frac{p}{(3n+3p+5)(3n+5)} < \frac{p}{3p(3n+5)} = \frac{1}{3(3n+5)}$ şi majorantul este un şir convergent la 0, al cărui termen general nu depinde de p. Rezultă că $(x_n)_n \in \mathbf{N}$ este şir fundamental.

b) $|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+p}}$. Observăm că pentru $p = n$ obţinem $x_{2n} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} > \frac{1}{\sqrt{n+n}} + \frac{1}{\sqrt{n+n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}$. Rezultă de aici că $|x_{2n} - x_n|$ nu tinde către 0, deci şirul $(x_n)_n \in \mathbf{N}$ nu este şir fundamental.

c) $|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$. Cum majorantul este un şir convergent la 0 şi nu depinde de p, rezultă că şirul $(x_n)_n \in \mathbf{N}$ este un şir fundamental.

d) $|x_{n+p} - x_n| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}\right| \leq$

$\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$

c) Deoarece $x_n = \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2-1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = n - 1 + \frac{1}{n+1} > n - 1$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Pentru orice $M>0$ există $n \in \mathbf{N}$ astfel încât $n - 1 > M$ (de exemplu $n = [M] + 2$), prin urmare există $n \in \mathbf{N}$ astfel încât $x_n > M$ deci $(x_n)_n \in \mathbf{N}$ nu este majorat, deci este nemărginit. Prin urmare, nu este fundamental.

Exercițiul 1.3.2. Stabiliți dacă următoarele șiruri sunt convergente:

a) $x_n = \frac{n+1}{n^2+2}$, $n \in \mathbf{N}$

b) $x_n = \frac{n^2}{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$

c) $x_n = \frac{2n \cdot n!}{n^n}$, $n \in \mathbf{N}^*$

d) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \in \mathbf{N}^*$

e) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}$, $n \in \mathbf{N}^*$

f) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $n \in \mathbf{N}^*$

Soluţii.

a) Şirul $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$ este mărginit: $0 < \frac{n+1}{n^2+2} < \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \leq 1$,

pentru orice $n \geq 2$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{2}{3}$, deci $x_n \in (0, 1)$ pentru orice $n\in \mathbf{N}$.

Şirul $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$ este strict descrescator:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+2} - \frac{n+1}{n^2+2} = \frac{n+2}{n^2+2n+3} - \frac{n+1}{n^2+2} =$$

$$= \frac{-n^2-3n+1}{(n^2+2n+3)(n^2+2)} < 0,$$ pentru orice $n\in \mathbf{N}^*$. Rezultă că şirul $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$ este convergent.

b) Şirul $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$ nu este mărginit (vezi exerciţiul precedent), deci nu este convergent.

c) Şirul $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$ este mărginit. Într-adevăr, aplicând inegalitatea mediilor pentru numerele $1, 2, \ldots, n$ obţinem $\frac{1+2+3+\ldots+n}{n} > \sqrt[n]{n!}$, adică

$\frac{n+1}{2} > \sqrt[n]{n!}$ sau $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$; înmulţind inegalitatea cu $\frac{2^n}{n^n}$, obţinem

$x_n < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < 3$, pentru orice $n \geq 2$. Cum $x_1 = 2 < 3$, rezultă că $x_n < 3$ pentru orice $n\in \mathbf{N}^*$. Evident, $x_n > 0$, pentru orice $n\in \mathbf{N}^*$, deci $x_n \in (0, 3)$ pentru orice $n\in \mathbf{N}^*$. Prin urmare, şirul $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$ este mărginit.

Deoarece $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!} = \frac{2}{(n+1)^n}\cdot n^n =$

$= 2\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < 2\cdot\frac{1}{2} = 1$, pentru orice $n\in \mathbf{N}^*$ deducem că şirul este strict descrescător. Rezultă că $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$ este convergent.

d) Şirul este fundamental (vezi exerciţiul precedent), iar ($\mathbf{R}$, d) este spaţiu metric complet (vezi teorema 1.1.1.1.), deci şirul este convergent.

Să observăm că $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, deci şirul este strict crescător.

Deoarece $1 < 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} = x_n < 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k} = 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$

$= 1 + \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$, adică $x_n\in(1, 2)$ pentru orice $n\in \mathbf{N}^*$, rezultă că şirul este şi mărginit, deci este convergent.

e) Şirul este fundamental (vezi exerciţiul precedent), iar $\mathbf{R}$ în raport cu distanţa euclidiană este spaţiu metric complet (vezi teorema 1.1.1.1.), deci şirul este convergent.

Să observăm că, spre deosebire de exerciţiul precedent, acest şir nu este monoton, deoarece diferenţa $x_{n+1} - x_n = \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)}$ nu păstrează semn constant pe $\mathbf{N}$, deci nu se poate aplica teorema de convergenţă a şirurilor monotone.

f) Şirul nu este fundamental (vezi exerciţiul precedent). Din teorema 1.1.1.1. deducem că acest şir nu este convergent.

Exercițiul 1.3.3. Aproximați limita șirului $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}$ cu două zecimale exacte.

Soluție. Despre acest șir s-a demonstrat că este fundamental, deci este convergent. Am arătat că $|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$. Dacă notăm $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, atunci $|x - x_n| \le \frac{1}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Pentru ca în aproximarea $x \approx x_n$ să avem două zecimale exacte este suficient ca

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{10^2}.$$

Prin urmare x_{100} aproximează pe x cu două zecimale exacte.

Exercițiul 1.3.4. Folosind principiul contracției să se calculeze rădăcina ecuației $x^3 + 4x - 1 = 0$ cu 4 zecimale exacte.

Soluție. Ecuația are o singură rădăcină reală situată în intervalul [0, 1] care este spațiu metric complet. Ecuația se poate scrie sub forma $x = \frac{1}{x^2+4} \overset{not}{=} f(x)$. Pe [0, 1] f este o contracție cu coeficientul $\frac{1}{8}$ pentru că $|f'(x)| = \left|\frac{-2x}{(x^2+4)^2}\right| < \frac{2}{4\cdot 4} = \frac{1}{8}$ pentru orice $x \in [0, 1]$. Alegem $x_0 = 0$.

Atunci $x_1 = f(x_0) = \frac{1}{4}$, $\delta = \left|\frac{1}{4} - 0\right| = \frac{1}{4}$.

Rezultă că $\frac{\delta}{1-c} \cdot c^n = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{8^n} < 10^{-4}$ pentru $n \ge 4$. Deci x_4 este aproximarea rădăcinii cu patru zecimale exacte.

Exercițiul 1.3.5. Determinați limitele extreme ale șirurilor:

a) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

b) $x_n = \frac{n^{2(-1)^n}}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Soluții. a) Prezența lui $(-1)^n$ sugerează considerarea următoarelor două subșiruri:

$$x_{2m} = \frac{1+(-1)^{2m}}{2} + (-1)^{2m} \cdot \frac{2m}{4m+1} = 1 + \frac{2m}{4m+1}, m \in \mathbf{N}$$

$$x_{2m+1} = \frac{1+(-1)^{2m+1}}{2} + (-1)^{2m+1} \cdot \frac{2m+1}{2(2m+1)+1} = 0 - \frac{2m+1}{4m+3} =$$

$$= -\frac{2m+1}{4m+3}, m \in \mathbf{N}$$

Evident, $\lim\limits_{m\to\infty} x_{2m} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $\lim\limits_{m\to\infty} x_{2m+1} = -\frac{1}{2}$

Prin urmare, mulțimea punctelor de acumulare a acestui șir este $\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$.

Deci $\underline{\lim}\, x_n = -\frac{1}{2}$, $\overline{\lim}\, x_n = \frac{3}{2}$.

b) Analog, $x_{2m} = \frac{(2m)^2}{2m} = 2m$, $m \in \mathbf{N}^*$

$$x_{2m+1} = \frac{(2m+1)^{2\cdot(-1)}}{2m+1} = \frac{1}{(2m+1)^3}, m \in \mathbf{N}.$$

Deoarece $\lim\limits_{m\to\infty} x_{2m} = \infty$ și $\lim\limits_{m\to\infty} x_{2m+1} = 0$, deducem că $\underline{\lim}\, x_n = 0$ și $\overline{\lim}\, x_n = \infty$.

Exercițiul 1.3.6. Să se studieze natura seriilor următoare și să se calculeze suma în caz de convergență:

a) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$; b) $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{3^n}$; c) $\sum_{n\geq 1}\ln\frac{n+1}{n}$.

Soluții.

a) $x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ pentru orice $n\in \mathbf{N}^*$.

$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$, pentru orice $n\in \mathbf{N}^*$.

Evident, $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$. Prin urmare, seria dată este convergentă și suma sa este $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1$

b) $x_n = \frac{n}{3^n}$, $n\in \mathbf{N}^*$ deci $s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k} = \frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{n-1}{3^{n-1}}+\frac{n}{3^n}$.

$$s_n = \frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\ldots+\underbrace{\left(\frac{1}{3^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)}_{n-1 \text{ termeni}} +$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{3^n}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right)}_{n \text{ termeni}}.$$

Atunci,

$$s_n = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{1}{3^n}\right)+\frac{1}{3^n},$$

adică

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3^k}+\frac{1}{3^{k+1}}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^{n-k}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} \cdot \frac{\frac{1}{3^{n-k}} \cdot \frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} \left(1 - \frac{1}{3^{n-k+1}} \right) =$$

$$= \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) = \frac{3}{2} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^{n+1}} \right] =$$

$$= \frac{3}{2} \left[\frac{\frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - 1} - \frac{n}{3^{n+1}} \right] \text{ pentru orice } n \in \mathbf{N}^*.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3^{n+1}} = 0$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{3}{4}$, deci seria dată este convergentă şi suma sa este $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$.

c) $x_n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln (n+1) - \ln n$.

$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln \frac{k+1}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln k] = \ln(n+1)$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, deci şirul $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ al sumelor parţiale este divergent.

Rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1} \ln \frac{n+1}{n}$ este divergentă. Să observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ deci această condiţie este necesară dar nu şi suficientă pentru convergenţa unei serii.

Exercițiul 1.3.7. Să se studieze natura seriilor următoare:

a) $\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$; b) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(1+a+a^2+...+a^n)}$, unde $a>0$

c) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot a^n$, unde $a>0$; d) $\sum_{n\geq 1}\frac{a^n\cdot n^n}{n!}$, unde $a>0$

e) $\sum_{n\geq 1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...(2n)}$

Soluții.

a) Deoarecc $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ este convergentă și $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{3/2}\cdot\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}=\sqrt{7}$

deducem că seria $\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$ este convergentă (vezi teorema 1.1.2.6)

b) Pentru $a>1$, seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{a^n}$ este convergentă (serie geometrică cu rația $\frac{1}{a}$). Deoarecc $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(1+a+a^2+...+a^n)}}{\frac{1}{a^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n\cdot\frac{a^{n+1}-1}{a-1}}=$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a-1}{n}\cdot\frac{a^n}{a^{n+1}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a-1}{n}\cdot\frac{1}{a-\frac{1}{a^n}}=0$, din teorema 1.1.2.6.

deducem că seria dată este convergentă.

Pentru $a=1$ seria devine $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ iar aceasta este

convergentă (ex. 1.3.6.a)

Pentru $0 < a < 1$ se poare folosi uşor teorema 1.1.2.6. folosind ca termen de comparaţie seria armonică $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ despre care se ştie că este divergentă.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(1+a+a^2+\ldots+a^n)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a+a^2+\ldots+a^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1-a}{1-a^{n+1}} = 1-a \text{ (căci } \lim_{n\to\infty} a^{n+1} = 0 \text{ deoarece } a\in (0, 1))$$

Deoarece $0 < 1 - a < \infty$ rezultă că cele două serii au aceeaşi natură. Rezultă astfel că, pentru $a\in (0, 1)$ seria dată este divergentă

c) $x_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot a^n$, $n\in \mathbf{N}^*$, $a > 0$. Prezenţa lui n la exponent sugerează aplicarea criteriului rădăcinii: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot a = a\cdot e$.

Prin urmare, dacă $0 < a < \frac{1}{e}$, avem $a\cdot e < 1$, deci seria este convergentă, iar dacă $a > \frac{1}{e}$, atunci $a\cdot e > 1$, deci seria este divergentă.

Rămâne de studiat cazul $a = \frac{1}{e}$. În acest caz, $x_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{e^n}$ pentru orice $n\in \mathbf{N}^*$.

Deoarece $e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$, $n\in \mathbf{N}^*$ rezultă $e^n < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2+n}$, de unde

$x_n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \frac{1}{e} \neq 0$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$ de unde obținem că $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.

d) $x_n = \frac{a^n \cdot n^n}{n!}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n \cdot n^n} = a \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a \cdot e$.

Dacă $0 < a < \frac{1}{e}$, avem $a \cdot e < 1$, de unde, cu criteriul raportului, obținem că $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este convergentă.

Dacă $a > \frac{1}{e}$, atunci $a \cdot e > 1$ de unde deducem că $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.

Rămâne de studiat cazul $a = \frac{1}{e}$.

Pentru $a = \frac{1}{e}$ avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$. Folosind din nou inegalitatea $e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$, valabilă pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ obținem

$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{n}{n+1}$ adică $(n+1)x_{n+1} > nx_n$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$. Rezultă $nx_n > 1 \cdot x_1$ adică $x_n > x_1 \cdot \frac{1}{n}$ şi $\sum_{k=1}^{n} x_k > x_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Cum $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă deducem (vezi teorema 1.1.2.5.) că $\sum_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.

e) Punând $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}$, $n \in \mathbf{N}^*$ obţinem:

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \to 1$, deci nu putem utiliza criteriul raportului. Deoarece $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = n \cdot \frac{1}{2n+1} \to \frac{1}{2} < 1$, obţinem, cu criteriul Raabe Duhamel, că $\sum_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.

Exerciţiul 1.3.8. Fie $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$, $f(n) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$. Demonstraţi că seria produs generată de şirul $f * f$ este divergentă.

Soluţie. Se observă că seria generată de şirul $(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ este semiconvergentă (cu criteriul lui Leibniz rezultă imediat că este convergentă deoarece $\frac{1}{\sqrt{n}} \downarrow 0$, iar $\left|(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ generează o serie divergentă)

Punând $u_n = v_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$, termenul general al seriei produs este $z_n = \sum_{k=1}^{n} u_k v_{n+1-k} = (-1)^{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{n+1-k}}$

Deoarece $\frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{n+1-k}} \geq \frac{1}{n}$ pentru orice k, $n \in \mathbf{N}^*$, $1 \leq k \leq n$ rezultă că $|z_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{n+1-k}} \geq n \cdot \frac{1}{n} = 1$, deci $|z_n| \geq 1$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

Astfel, z_n nu tinde către zero şi prin urmare seria $\sum_{n\geq 1} z_n$ este divergentă.

Exerciţiul 1.3.9. Să se aproximeze sumele seriilor următoare cu o eroare mai mică decât 10^{-2}:

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}$, b) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^n}$, c) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n!)^2}$

Soluţii. a) Dacă notăm $x_n = \frac{1}{n^n}$, $n \in \mathbf{N}^*$ atunci $\sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$, pentru orice $n \geq 2$. Atunci rezultă că, pentru orice $n \geq 2$ are loc $|s - s_n| \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$

unde s este suma seriei, iar s_n este suma parţială de ordinul n.

Deci $|s - s_n| \leq \frac{1}{2^n}$ pentru orice $n \geq 2$. Pentru ca s_n să aproximeze s cu o eroare mai mică decât 10^{-2} este suficient să determinăm cel mai mic rang n care satisface inegalitatea $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10^2}$.

Se obține $n = 7$ deci $s \approx s_7 = 1.291285935$ cu două zecimale exacte.

b) Deoarece $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{10^2}$ pentru orice $n \geq 4$ rezultă că

$0 < s - s_3 < \frac{1}{4^4} < \frac{1}{10^2}$, $0 < s_4 - s < \frac{1}{5^5} < \frac{1}{10^2}$. Deci $s_3 = -7870370370$ aproximează pe s prin lipsă, iar $s_4 = -7831307870$ prin adaos, ambele cu o eroare mai mică decât 10^{-2}.

c) Dacă notăm $x_n = \frac{1}{(n!)^2}$, $n \in \mathbf{N}^*$ atunci $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{4}$ pentru orice $n \geq 1$ de unde rezultă evaluarea:

$0 < s - s_n \leq \frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$, adică $0 < s - s_n \leq \frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{3}$, pentru orice $n \geq 1$.

Cum $\frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{3} < 10^{-2}$ pentru orice $n \geq 3$ rezultă că $s \approx s_3 = 1,277777778$.

1.4. Exerciții propuse

Exercițiul 1.4.1. Demonstrați că următoarele șiruri sunt fundamentale:

a) $x_n = \frac{n+3}{5n+4}$, $n \in \mathbf{N}$ b) $x_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3}$, $n \in \mathbf{N}^*$

c) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2k+3)}{k^2}$, $n \in \mathbf{N}^*$ d) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{arctg}(kx)}{k^3}$, $n \in \mathbf{N}^*$

e) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{\pi}{k}$, $n \in \mathbf{N}^*$ f) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!(k+2)}$, $n \in \mathbf{N}^*$

Exercițiul 1.4.2. Fie $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$ un șir de numere reale cu proprietatea că există $c\in \mathbf{R}$, $0 < c < 1$ astfel încât $|x_{n+1} - x_n| \le c\cdot|x_n - x_{n-1}|$ pentru orice $n\in \mathbf{N}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$ este fundamental.

Exercițiul 1.4.3. Stabiliți dacă următoarele șiruri sunt convergente:

a) $x_n = \dfrac{n+3}{2n+1}$, $n\in \mathbf{N}$ b) $x_n = \dfrac{n^3+2}{3n^2+1}$, $n\in \mathbf{N}$

c) $x_n = \left(\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\right)^{n^2}$, $n\in \mathbf{N}$ d) $x_n = (1+\cos n\pi)\dfrac{n}{n+1}$, $n\in \mathbf{N}$

e) $x_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^3}$, $n\in \mathbf{N}^*$ f) $x_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{\cos(k!)}{k^2}$, $n\in \mathbf{N}^*$

g) $x_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}$, $n\in \mathbf{N}^*$

R. a) convergent, b) divergent, c) divergent, d) divergent, e) convergent, f) convergent, g) convergent.

Exercițiul 1.4.4. Determinați limitele extreme ale șirurilor:

a) $x_n = \dfrac{1}{n}n^{(-1)^n} + \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$, $n\in \mathbf{N}^*$.

b) $x_n = (1 + (-1)^n)n$, $n\in \mathbf{N}$

c) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$, $n\in \mathbf{N}^*$.

R. a) -1, 1; b) 0, ∞; c) 0, 1.

Exercițiul 1.4.5. Determinați limitele șirurilor:

a) $x_n = \dfrac{n+1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2^k}{k}$, $n\in \mathbf{N}$ b) $x_n = \dfrac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$, $n\in \mathbf{N}^*$, $n \ge 2$

c) $x_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}$, $n\in \mathbf{N}^*$, $n \ge 2$

R. a) 1, b) 1, c) $\dfrac{4}{e}$.

Exercițiul 1.4.6. Să se studieze natura seriilor următoare și să se calculeze suma în caz de convergență:

a) $\sum_{n\geq 1}\frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$ b) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}, \alpha \geq 0$

c) $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{\alpha^n}, |\alpha|>1$ d) $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

e) $\sum_{n\geq 2}\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)$ f) $\sum_{n\geq 2}\frac{\ln((n+1)/n)}{\ln n\cdot\ln(n+1)}$

g) $\sum_{n\geq 1}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$ h) $\sum_{n\geq 1}\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}$

Indicație:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}}=\operatorname{arctg}\frac{1}{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}$$

R. a) convergentă, $s=\frac{5}{4}$, b) convergentă, $s=\frac{1}{\alpha+1}$,

c) convergentă, $s=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$, d) divergentă, $\lim_{n\to\infty}s_n=\infty$,

e) convergentă, $s=\sqrt{a}-1$, f) convergentă, $s=\frac{1}{\ln 2}$,

g) convergentă. $s=\frac{\pi}{4}$, h) divergentă.

Exercițiul 1.4.7. Folosind criteriul rădăcinii să se studieze convergența următoarelor serii:

a) $\sum_{n\geq 1} \operatorname{arctg}^n\left(\frac{1}{n}\right)$ b) $\sum_{n\geq 1} n\cdot a^n, a>0$ c) $\sum_{n\geq 1} \operatorname{tg}^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$

d) $\sum_{n\geq 1} \sin^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$ e) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$

R. a) convergentă, b) convergentă dacă $a < 1$, divergentă dacă $a \geq 1$,
c) divergentă, d) convergentă, e) convergentă.

Exercițiul 1.4.8. Folosind criteriul raportului, să se studieze convergența următoarelor serii:

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{\sqrt{n!}}$ b) $\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ c) $\sum_{n\geq 1} \frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$

d) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{e^n}$ c) $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{2^n+1}$ f) $\sum_{n\geq 1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}$

R. a) convergentă, b) convergentă, c) convergentă, d) convergentă,
e) divergentă, f) convergentă.

Exercițiul 1.4.9. Să se studieze convergența următoarelor serii alternate. În caz de convergență, să se precizeze dacă seriile sunt semiconvergente.

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ b) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ d) $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$

e) $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ f) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$

R. a) semiconvergentă, b) semiconvergentă, c) absolut convergentă,
d) semiconvergentă, e) divergentă, f) absolut convergentă

Exercițiul 1.4.10. Demonstrați că următoarele serii sunt absolut convergente:

a) $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(na)}{n^2}$, $a\in\mathbf{R}$; b) $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(na)}{n^2}$, $a\in\mathbf{R}$; c) $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(na)}{2^n}$, $a\in\mathbf{R}$

Exercițiul 1.4.11. Să se aproximeze sumele seriilor următoare cu o eroare mai mică decât 10^{-2}:

a) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{10^n\cdot n!}$; b) $\sum_{n\geq 1}\frac{2n+1}{(\sqrt{3})^n}$; c) $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^n}$; d) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!}$.

R. a) $s\approx s_2 = 0{,}1050000000$; b) $s\approx s_7 = 6{,}676399794$;

c) $s\approx s_6 = 0{,}6718750000$; d) $s\approx s_5 = 0{,}6333333333$

Exercițiul 1.4.12. Să se determine suma seriei de termen general x_n dacă:

a) $x_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, $n\in\mathbf{N}^*$ b) $x_n = \frac{3^n+2^n}{6^n}$, $n\in\mathbf{N}$

c) $x_n = ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$, $n\in\mathbf{N}^*$

d) $x_n = \sqrt{n+2+\alpha}-2\sqrt{n+1+\alpha}+\sqrt{n+\alpha}$, $n\in\mathbf{N}$, $\alpha\in\mathbf{R}_+$

e) $x_n = ln\cos\frac{\alpha}{2^n}, \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

R. a) 1; b) 7/2; c) $ln\,3$; d) $\sqrt{\alpha}-\sqrt{1+\alpha}$; e) $ln\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$.

Exercițiul 1.4.13. Să se stabilească natura seriilor următoare:

a) $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n\alpha)}{n^p}$, $p>0$, $\alpha\in(0,\pi)$ b) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n+1}{3^n}$

c) $\sum_{n\geq 1}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$ d) $\sum_{n\geq 1}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$

e) $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\sqrt[n]{n^3}}$ f) $\sum_{n\geq 1}\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

R. a) convergentă, b) convergentă, c) convergentă, d) convergentă, e) divergentă, f) convergentă.

Exercițiul 1.4.14. Să se stabilească natura seriei $\sum_{n\geq 1}a^n\cdot tg\frac{\omega}{2^n}$, $a>0$, $\omega\in(0,\pi)$.

R. Seria este convergentă pentru $a\in(0,2)$ și divergentă pentru $a\geq 2$.

Exercițiul 1.4.15. Să se stabilească dacă se poate aplica criteriul lui Leibniz pentru seriile:

a) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1+\cos n\pi}{n}$

b) $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos n\pi}{\operatorname{arctg}(tg\, n)}$

c) $\sum_{n\geq 1}\sin\frac{n^2+n+1}{n+1}\cdot\pi$

R. a) Nu, b) Da, c) Da.

2. SERII DE PUTERI REALE. DEZVOLTĂRI ÎN SERIE

2.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale.

2.1.1. Şiruri de funcţii reale.

Definiţia 2.1.1.1. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime oarecare, fixată şi fie $\mathcal{F}$ mulţimea tuturor funcţiilor reale definite pe A. O aplicaţie $F:\mathbf{N} \to \mathcal{F}$ se numeşte *şir de funcţii reale.* Dacă notăm cu f_n funcţia ataşată lui $n \in \mathbf{N}$, deci $f_n = F(n)$, atunci notăm şirul F prin $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Un element $x \in A$ se numeşte *punct de convergenţă* al şirului $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$, dacă şirul numeric $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ este convergent în $\mathbf{R}$. Mulţimea A_c a tuturor punctelor de convergenţă se numeşte *mulţimea de convergenţă* a şirului dat. Şirul de funcţii $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *converge punctual* pe mulţimea A_c către funcţia $f: A_c \to \mathbf{R}$ dacă pentru fiecare $x \in A_c$ şirul numeric $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ converge către $f(x)$. Funcţia f se numeşte *limita punctuală* a şirului $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Teorema 2.1.1.1. Şirul de funcţii $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge punctual pe mulţimea A_c către funcţia f, dacă şi numai dacă, pentru orice $x \in A_c$ şi orice $\varepsilon > 0$, există $n_0 \in \mathbf{N}$ (n_0 depinzând de x şi ε) astfel încât, pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ să avem $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Dacă în această condiţie cerem ca n_0 să fie acelaşi pentru orice $x \in A_c$, deci să depindă numai de ε, obţinem o condiţie mai restrictivă, şi anume, cea de convergenţă uniformă.

Definiţia 2.1.1.2. Şirul de funcţii $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *converge uniform pe mulţimea* A_c către $f: A_c \to \mathbf{R}$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in \mathbf{N}$ (n_0 depinzând de ε) astfel încât, pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ şi orice $x \in A_c$ să avem $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Observația 2.1.1.1. Dacă șirul de funcții $(f_n)_{n\in \mathbf{N}}$ converge uniform pe mulțimea A_c către funcția f, atunci el converge punctual pe A_c către f; reciproca nu este însă adevărată.

Exemplul 2.1.1.1. Șirul de funcții $(f_n)_{n\in \mathbf{N}}$, $f_n : [0, 1]\to\mathbf{R}$, $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$, converge punctual pe [0, 1] către funcția identic nulă, dar nu converge uniform pe [0, 1] către această funcție. Prima afirmație rezultă imediat ținând seamă că pentru $x\in [0, 1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, iar $f_n(1) = 0$, $n\in \mathbf{N}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 0$. Pentru a doua afirmație, fie $\varepsilon_0 = \frac{1}{10}$. Pentru orice $n\in \mathbf{N}$, $n\geq 2$, fie $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in [0, 1]$. Să observăm că $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{4} > \frac{1}{10}$. Rezultă astfel că șirul $(f_n)_{n\in \mathbf{N}}$ nu converge uniform pe [0, 1] către funcția identic zero.

Convergența uniformă are o proprietate importantă , și anume, aceea de a transmite unele proprietăți ale termenilor șirului, funcției limită.

Teorema 2.1.1.2. Dacă șirul $(f_n)_{n\in \mathbf{N}}$ converge uniform pe mulțimea A_c la funcția f, iar termenii șirului sunt funcții continue pe A_c, atunci f este continuă pe A_c.

Observația 2.1.1.2. a) Convergența punctuală nu are această proprietate. Șirul de funcții $(f_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$ $f_n(x) = 1 + x^n$, $n\in \mathbf{N}^*$, $x\in [0, 1]$ converge punctual către funcția discontinuă $f:[0, 1]\to\mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, x \in [0,1) \\ 2, x = 1 \end{cases}$ cu toate că termenii șirului sunt funții continue.

b) Convergența uniformă este o condiție suficientă, dar nu și necesară pentru continuitatea limitei unui șir de funcții continue. Șirul e funcții $(f_n)_{n\in \mathbf{N}}$ unde $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$, $n\in \mathbf{N}$, $x\in [0, 1]$, considerat anterior, are termenii funcții continue, converge punctual către o funcție continuă, dar nu converge uniform către această funcție.

În legătură cu derivabilitatea limitei unui șir de funcții derivabile, se poate demonstra:

Teorema 2.1.1.3. (de derivare termen cu termen) Fie şirul $(f_n)_{n\in \mathbf{N}}$ cu următoarele proprietăţi:

a) şirul $(f_n)_{n\in \mathbf{N}}$ converge punctual pe mulţimea A_c către funcţia f;
b) termenii şirului sunt funcţii derivabile pe A_c;
c) şirul $(f'_n)_{n\in \mathbf{N}}$ al derivatelor converge uniform pe A_c către o funcţie g.

Atunci funcţia f este derivabilă pe A_c şi $f' = g$.

Observaţia 2.1.1.3. a) Teorema se numeşte "de derivare termen cu termen", deoarece egalitatea $f' = g$ înseamnă de fapt că derivata limitei unui şir de funcţii este egală cu limita şirului derivatelor.

b) Condiţia ca şirul derivatelor să conveargă uniform deşi este esenţială în demonstraţia teoremei, nu este neapărat necesară.

Exemplul 2.1.1.2. Şirul de funcţii $f_n(x) = \frac{1}{2n}\ln(1+n^4x^2)$ $n\in \mathbf{N}^*$, $x\in [0, 1]$, poate fi derivat termen cu termen. Într-adevăr, funcţia limită este $f:[0, 1]\to\mathbf{R}$, $f(x) = 0$ pentru orice $x\in [0, 1]$, şirul derivatelor $f'_n(x)=\frac{n^3x}{1+n^4x^2}$, $x\in [0, 1]$, $n\in \mathbf{N}^*$ converge către funcţia $g:[0, 1]\to\mathbf{R}$, $g(x) = 0$ pentru orice $x\in [0, 1]$, deci $f' = g$. Dar şirul derivatelor nu converge uniform. Într-adevăr, fie $\varepsilon_0 = \frac{1}{10}$ şi, pentru orice $n\in \mathbf{N}^*$, fie $x_n=\frac{1}{n^2}$. Atunci $f'_n(x_n)=\frac{n}{2} \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{10}$. Deci condiţia ca şirul derivatelor să conveargă uniform nu este necesară pentru derivarea termen cu termen a unui şir de funcţii.

Teorema 2.1.1.4. (de integrare termen cu termen) Dacă şirul $(f_n)_{n\in \mathbf{N}}$ converge uniform pe mulţimea A_c către funcţia f, iar termenii şirului sunt funcţii continue pe A_c, atunci, oricare ar fi intervalul $[a, b]\subseteq A_c$, funcţia f este integrabilă pe [a, b] şi $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$.

Observaţia 2.1.1.4. Şi aici convergenţa uniformă este condiţie suficientă, dar nu şi necesară. De exemplu, şirul $(f_n)_n \in \mathbf{N}$ studiat în exemplul 2.1.1.1. nu converge uniform către $f(x) = 0, x \in [0, 1]$ dar are loc egalitatea

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx .$$

2.1.2. Serii de funcţii reale

Definiţia 2.1.2.1. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime oarecare, fixată şi fie $\mathcal{F}$ mulţimea tuturor funcţiilor reale definite pe A. Fie $F : \mathbf{N} \to \mathcal{F}$, $F(n) = f_n$ un şir de funcţii din $\mathcal{F}$. Fie $G : \mathbf{N} \to \mathcal{F}$, $G(n) = S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. Şirul de funcţii G se numeşte *şirul sumelor parţiale asociat şirului* F, iar perechea (F, G) se numeşte *serie de funcţii* generată de şirul F. Frecvent se notează această serie prin $\sum_{n\geq 0} f_n$. Se numeşte *mulţime de convergenţă a seriei* (F, G), mulţimea de convergenţă a şirului G; notăm în continuare această mulţime cu A_c. Seria (F, G) *converge punctual pe* A_c, dacă şirul G converge punctual pe A_c. Limita punctuală S a şirului G se numeşte *suma seriei* şi notăm

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} f_k .$$

Evident, $S : A_c \to \mathbf{R}$, $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$.

Seria (F, G) se numeşte *uniform convergentă* pe mulţimea A_c dacă şirul G al sumelor parţiale converge uniform pe A_c.

Seria (F, G) se numeşte *absolut convergentă* pe mulţimea A_c dacă seria $\sum_{n\geq 0} |f_n|$ este punctual convergentă pe A_c.

Observaţia 2.1.2.1. Atât convergenţa uniformă cât şi convergenţa absolută a unei serii de funcţii implică convergenţa punctuală, reciproca nefiind, în

general, adevărată. Între convergenţa uniformă şi convergenţa absolută nu există nici o legătură general valabilă.

Astfel, seria de funcţii generată de $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$, $n \in \mathbf{N}^*$, $x \in \mathbf{R}$ converge uniform pe orice segment al dreptei reale, dar nu converge absolut pentru nici un x; seria de funcţii generată de şirul $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x}$, $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$ converge absolut pe $(0, \infty)$, dar nu converge uniform pe această mulţime; seria de funcţii generată de şirul $f_n(x) = \frac{\sin nx}{2^n}$, $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$ converge absolut şi uniform pe $\mathbf{R}$.

Având în vedere importanţa convergenţei absolute şi uniforme a unei serii de funcţii, prezentăm aici cel mai des utilizat criteriu de convergenţă absolută şi uniformă.

Teorema 2.1.2.1. (Weierstrass) Dacă pentru seria de funcţii reale $\sum_{n\geq 0} f_n$ există o serie convergentă de numere pozitive $\sum_{n\geq 0} a_n$, astfel încât, pentru orice $n \in \mathbf{N}$ şi orice $x \in A_c$, $|f_n(x)| \leq a_n$, atunci seria $\sum_{n\geq 0} f_n$ este absolut şi uniform convergentă pe A_c.

Referitor la proprietăţile comune termenilor unei serii de funcţii care se transferă sumei seriei, aplicând teoremele 2.1.1.2., 2.1.1.3, 2.1.1.4 şirului sumelor parţiale, se demonstrează uşor:

Teorema 2.1.2.2. Fie $\sum_{n\geq 0} f_n$ o serie de funcţii reale.

a) Dacă funcţiile f_n, $n \in \mathbf{N}$ sunt continue pe A_c şi $\sum_{n\geq 0} f_n$ este uniform convergentă pe A_c, atunci suma seriei este o funcţie continuă pe A_c.

b) Dacă funcţiile f_n, $n \in \mathbf{N}$ sunt derivabile pe A_c, seria $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge punctual pe A_c, iar seria $\sum_{n\geq 0} f'_n$ este uniform convergentă pe A_c, atunci $\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n$ (Se spune în acest caz că seria de funcţii dată poate fi "derivată termen cu termen")

c) Dacă funcţiile f_n, $n \in \mathbf{N}$ sunt continue pe A_c şi seria $\sum_{n\geq 0} f_n$ este uniform convergentă pe A_c, atunci suma sa este integrabilă pe orice interval $[a, b] \subseteq A_c$ şi $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$. (Se spune în acest caz că seria de funcţii dată poate fi "integrată termen cu termen").

2.1.3. Serii de puteri reale.

Seriile de puteri sunt serii de funcţii particulare, deosebit de importante.

Definiţia 2.1.3.1. Fie $(a_n)_n \in \mathbf{N}$ un şir de numere reale. Se numeşte *serie de puteri reale* cu coeficienţii a_n, $n \in \mathbf{N}$, seria de funcţii $\sum_{n\geq 0} f_n$, unde $f_n(x) = a_n x^n$, $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$.

Principalele rezultate privind mulţimea de convergenţă a unei asemenea serii, precum şi proprietăţile sumei, (datorate matematicienilor Abel, Cauchy, Hadamard) sunt concentrate în teorema următoare.

Teorema 2.1.3.1. Fie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $x \in \mathbf{R}$ o serie de puteri reale, cu coeficienţii daţi a_n, $n \in \mathbf{N}$ şi $r \geq 0$ definit prin:

$$r = \begin{cases} 0 & , \text{daca } \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} & , \text{daca } 0 < \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} < \infty \\ \infty & , \text{daca } \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 0 \end{cases}$$

Atunci:

a) dacă r = 0, singurul punct de convergenţă al seriei este $x = 0$;
b) dacă r > 0, seria este absolut convergentă pe intervalul (-r, r) şi este divergentă pentru $|x| > r$;
c) dacă r > 0, seria este uniform convergentă pe orice interval $[a, b] \subset (-r, r)$;
d) dacă $x = r$ este punct de convergenţă al seriei, atunci suma sa este continuă în acest punct; analog pentru $x = -r$;
e) dacă r > 0, suma seriei admite derivate de orice ordin în intervalul (-r, r) şi aceste derivate se pot calcula prin derivare termen cu termen;
f) dacă r > 0, seria poate fi integrată termen cu termen pe orice interval $[a, b] \subset (-r, r)$.

Observaţia 2.1.3.1. a) Numărul r se numeşte *rază de convergenţă* a seriei de puteri. Formula de calcul pentru r se numeşte *formula Cauchy-Hadamard.*

b) Se poate demonstra că, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ există, atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ şi cele două limite sunt egale. Prin urmare, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, atunci $\dfrac{1}{r} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ (cu convenţia $\dfrac{1}{0} = \infty$ şi $\dfrac{1}{\infty} = 0$).

2.1.4. Serii Taylor. Dezvoltări în serie.

Definiția 2.1.4.1. Fie $(a_n)_{n\in \mathbf{N}}$ un șir de numere reale și $n\in \mathbf{N}$, fixat. Se numește *serie Taylor, cu coeficienții* a_n, $n\in \mathbf{N}$, *centrată în* x_0, seria de funcții $\sum_{n\geq 0} f_n$, unde $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, $n\in \mathbf{N}$, $x\in \mathbf{R}$.

Este evident că orice serie de puteri este o serie Taylor centrată în punctul $x_0 = 0$. De asemenea, dacă $x_0 \in \mathbf{R}$, $x_0 \neq 0$, printr-o translație $x - x_0 = y$, o serie Taylor centrată în x_0 se transformă într-o serie de puteri, centrată în origine. Din acest motiv, teorema 2.1.3.1. de la serii de puteri poate fi extinsă ușor la serii Taylor. Se obține astfel:

Teorema 2.1.4.1. Fie $\sum_{n\geq 0} f_n$ o serie Taylor cu coeficienții a_n, $n\in \mathbf{N}$, centrată în x_0 și $r \geq 0$ definit prin:

$$r = \begin{cases} 0 & , \text{daca } \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} & , \text{daca } 0 < \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} < \infty \\ \infty & , \text{daca } \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 0 \end{cases}$$

Atunci:

a) dacă $r = 0$, singurul punct de convergență al seriei este $x = x_0$;
b) dacă $r > 0$, seria este absolut convergentă pe intervalul $(x_0 - r, x_0 + r)$ și divergentă pentru $|x - x_0| > r$;
c) dacă $r > 0$, seria este uniform convergentă pe orice interval $[a, b] \subset (x_0 - r, x_0 + r)$;
d) dacă $x = x_0 + r$ este punct de convergență al seriei, atunci suma sa este continuă în acest punct; analog, pentru $x = x_0 - r$;
e) dacă $r > 0$, suma seriei admite derivate de orice ordin în intervalul $(x_0 - r, x_0 + r)$ și aceste derivate se pot calcula prin derivare termen cu termen;
f) dacă $r > 0$, seria poate fi integrată termen cu termen pe orice interval $[a, b] \subset (x_0 - r, x_0 + r)$;

Rămâne valabilă observaţia referitoare la determinarea razei de convergenţă r.

În teorema precedentă, fiind daţi coeficienţii a_n, $n \in \mathbf{N}$ şi punctul fixat $x_0 \in \mathbf{R}$, se deduc proprietăţi ale sumei seriei. Problema poate fi pusă însă şi invers: fiind dată suma seriei şi punctul fixat $x_0 \in \mathbf{R}$, să se determine coeficienţii a_n, $n \in \mathbf{N}$. Apare, astfel, problema găsirii unei serii Taylor a cărei sumă să fie o funcţie dată, funcţie care se va numi dezvoltabilă în serie Taylor.

Definiţia 2.1.4.2. Fie I un interval deschis al axei reale, $f : I \to \mathbf{R}$, $x_0 \in I$. Funcţia f se numeşte *dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului* x_0, dacă există şirul de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ şi $\varepsilon > 0$ astfel încât:

- $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I$, $\varepsilon \leq r$, unde r este raza de convergenţă a seriei Taylor cu coeficienţii a_n, $n \in \mathbf{N}$, centrată în x_0 ;
- pentru orice $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ avem $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Apar în mod natural două probleme:

- În ce condiţii o funcţie f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul unui punct dat?
- Cum se pot calcula coeficienţii a_n $n \in \mathbf{N}$,dacă se cunoaşte funcţia f?

Referitor la problema a doua, ţinând seama de teorema 2.1.4.1., e), avem:

Teorema 2.1.4.2. Fie $f : I \to \mathbf{R}$, $x_0 \in I$ fixat. Dacă f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului x_0, atunci f admite derivate de orice ordin în x_0 şi, pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}_{(x_0)}$.

Observaţia 2.1.4.1. Din această teorema rezultă că existenţa derivatelor de orice ordin într-o vecinătate a lui x_0 este o condiţie necesară pentru ca o funcţie să fie dezvoltabilă în serie Taylor. Ea nu este însă şi suficientă.

Exemplul 2.1.4.1. Funcţia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, x > 0 \\ 0 \quad , x \leq 0 \end{cases}$ are derivate de orice ordin pe $\mathbf{R}$, $f_{(0)}^{(n)} = 0$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Ea nu este însă dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului $x_0 = 0$, pentru că, dacă ar fi, ar rezulta

$a_n = 0$, $n \in \mathbf{N}$ şi, prin urmare, $f(x) = 0$ pentru orice $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, ceea ce este fals.

Observaţia 2.1.4.2. Din teorema precedentă rezultă că, dacă f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului x_0, există o singură serie Taylor a cărei sumă să fie f pe intervalul $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ şi anume, seria cu coeficienţii $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}_{(x_0)}$, $n \in \mathbf{N}$. Această serie se mai numeşte *seria Taylor asociată funcţiei f în jurul punctului x_0*. Prin urmare, referitor la prima problemă formulată anterior, este suficient să stabilim în ce condiţii o funcţie indefinit derivabilă (are derivate de orice ordin) este suma seriei Taylor asociate pe intervalul $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Pentru aceasta, este deosebit de utilă următoarea:

Teorema 2.1.4.3. Fie $f: I \to \mathbf{R}$ o funcţie de $n+1$ ori derivabilă pe intervalul I, $x_0 \in I$ fixat. Atunci, pentru orice $x \in I$, există cel puţin un punct ξ (depinzând de x) situat între x_0 şi x, astfel încât:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Aceasta este *formula lui Taylor* pentru o funcţie reală, de $n+1$ ori derivabilă pe I cu restul $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ în sensul lui Lagrange.

Polinomul:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se numeşte *polinomul Taylor de gradul n* asociat funcţiei f şi punctului fixat x_0.

Observaţia 2.1.4.3. Coeficienţii a_n, $n \in \mathbf{N}$ obţinuţi în teorema 2.1.4.2. coincid cu cei din formula lui Taylor pentru funcţia f şi punctul x_0. Deci,

polinomul lui Taylor $T_n(x)$ asociat funcției f și punctului x_0 este suma parțială de ordin n a seriei Taylor asociate funcției f în jurul punctului x_0 și, prin urmare, referitor la prima problemă, obținem acum:

Teorema 2.1.4.4. Fie $f:I\to\mathbf{R}$ o funcție indefinit derivabilă (are derivate de orice ordin) pe o vecinătate a punctului fixat $x_0\in I$. Atunci funcția f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului x_0, dacă și numai dacă, există o vecinătate V a punctului x_0, încât, pentru orice $x\in$ V avem $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

Cu ajutorul acestei teoreme se obține ușor următorul criteriu, utilizat de obicei în practică:

Teorema 2.1.4.5. Fie $f:I\to\mathbf{R}$ o funcție indefinit derivabilă pe o vecinătate V a punctului fixat $x_0\in I$. Presupunem că există $M > 0$ astfel ca, pentru orice $n\in\mathbf{N}$ și orice $x\in$ V, să avem $|f_{(x)}^{(n)}| \le M$ (funcția f are derivatele egal mărginite pe V). Atunci f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului x_0, adică $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_{(x_0)}^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n$, pentru orice $x\in V$.

2.2 Tipuri de probleme și metode de rezolvare.

Exercițiul 2.2.1. Să se determine mulțimea de convergență și suma seriei de puteri $\sum_{n\ge 0} a_n x^n$.

- Se determină raza de convergență r (cu formula Cauchy-Hadamard) și $(-r, r) \subset A_c$.
- Se studiază separat $x = r$ și $x = -r$
  - *Dacă* $\sum_{n\ge 0} a_n r^n$ e convergentă, atunci $r\in A_c$
  - *Dacă* $\sum_{n\ge 0} a_n (-r)^n$ este convergentă, atunci $-r\in A_c$
  - Se stabilește mulțimea de convergență.
- Pentru calculul sumei se folosesc formule cunoscute, sau se derivează (integrează) seria termen cu termen. Din continuitatea sumei în $-r$ sau r (dacă acestea sunt puncte de convergență) se deduce valoarea sa în aceste puncte.

Exercițiul 2.2.2. Să se arate că $f: I \to \mathbf{R}$ $f(x) = \ldots$ este dezvoltabilă în serie de puteri.

- Se scrie $R_n(x)$ și se arată că $R_n(x) \to 0$ pentru orice $x \in A_c$

Sau

- Se arată că există $M \in \mathbf{R}$ astfel încât $|f^{(n)}(x)| < M$ pentru orice $x \in A_c$ și orice $n \in \mathbf{N}$.

Exercițiul 2.2.3. Să se dezvolte în serie de puteri funcția $f(x) = \ldots$

- Se determină mulțimea pe care f este dezvoltabilă în serie de puteri – se calculează $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, ...(demonstrând prin inducție formula lui $f^{(n)}(x)$) și se scrie dezvoltarea.

Sau

- Se fac substituții în dezvoltări cunoscute (pentru $\frac{1}{1-x}$, e^x, *sin x*, *cos x*, etc).
- Se scrie funcția ca suma finită de funcții a căror dezvoltare este cunoscută și se însumează termen cu termen dezvoltările.
- Se dezvoltă în serie de puteri $f'(x)$ și se integrează rezultatul, determinând constanta de integrare cu ajutorul valorii $f(0)$.

Exercițiul 2.2.4. Să se calculeze $f(a)$ cu k zecimale exacte.

- Se arată că f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul lui x_0 pe o mulțime care îl conține pe a
- Se scrie dezvoltarea în serie Taylor
- Se consideră seria numerică $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(a-x_0)^n$ și se evaluează suma seriei, care este de fapt $f(a)$ cu k zecimale exacte (după modelul de la serii de numere reale).

Exercițiul 2.2.5. Să se calculeze $\int_a^b f(x)dx$ cu k zecimale exacte.

- Se dezvoltă f în serie Taylor în jurul lui x_0, eventual de puteri, pe o mulțime ce conține pe $[a, b]$

- Se studiază seria numerică $\sum_{n\geq 0}\int_a^b \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n dx$ şi se aproximează suma sa (ca la serii numerice) cu k zecimale exacte.

2.3. Exerciţii rezolvate.

Exerciţiul 2.3.1. Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma seriilor de puteri: a) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$; b) $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Soluţie.

a) Raza de convergenţă este: $r = \frac{1}{\overline{\lim}_n\sqrt[n]{\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$

Pentru $x = -1$ obţinem $f_n(-1) = (-1)^{2n+1}\cdot\frac{1}{n} = -\frac{1}{n}$, $n\in \mathbf{N}^*$.

Seria generată de şirul numeric $\{f_n(-1)\}_{n\in \mathbf{N}}$ are aceeaşi natură cu seria armonică, deci este divergentă. Pentru $x = 1$, obţinem $f_n(1) = (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$, $n\in \mathbf{N}^*$. Acest şir generează seria armonică alternată care, conform criteriului lui Leibniz, este convergentă. Mulţimea de convergenţă a seriei de puteri considerate este deci $(-1, 1]$.

Fie $S: (-1, 1] \to \mathbf{R}$ $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}$.

Pentru orice $x\in (-1, 1)$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1} = \frac{1}{1+x}$.

Din $S'(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \in (-1, 1)$ şi $S(0) = 0$ rezultă $S(x) = \ln(1+x)$ pentru orice $x \in (-1, 1)$. Ţinând seama de observaţia de mai sus, rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = S(1) = \lim_{x \to 1} S(x) = \lim_{x \to 1} \ln(1+x) = \ln 2$.

Deci, suma seriei armonice alternate este $\ln 2$. Acest rezultat permite aproximarea numărului $\ln 2$ prin numere raţionale şi evaluarea erorii făcute.

b) Raza de convergenţă este dată de : $r = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[m]{|a_m|}}$ unde

$$a_m = \begin{cases} 0, & \text{daca } m = 2n \\ \frac{(-1)^n}{2n+1}, & \text{daca } m = 2n+1 \end{cases}.$$

Deci $\sqrt[m]{|a_m|} = \begin{cases} 0, & \text{daca } m = 2n \\ \frac{1}{\sqrt[m]{m}}, & \text{daca } m = 2n+1 \end{cases}$. Deoarece $\lim_{m \to \infty} \sqrt[m]{m} = 1$, şirul $(\sqrt[m]{|a_m|})_{m \in \mathbf{N}}$ are punctele de acumulare 0 şi 1. Prin urmare $\overline{\lim}_{m \to \infty} \sqrt[m]{|a_m|} = 1$, deci $r = 1$.

Pentru $x = -1$ se obţine seria numerică $\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$ care este convergentă (se aplică criteriul lui Leibniz).

Pentru $x = 1$ se obţine seria $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ care este de asemenea convergentă.

Prin urmare, mulţimea de convergenţă este $A = [-1, 1]$.

Fie acum $S : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Aplicând teorema de derivare termen cu termen, deducem că, pentru orice $x \in (-1, 1)$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$. Deci $S(x) = arctg\, x + C$. Din $S(0) = 0$ rezultă $S(x) = arctg\, x$ pentru orice $x \in (-1, 1)$. Deoarece S este continuă în 1, deducem acum că $S(1) = \lim_{x \to 1, x<1} S(x) = \frac{\pi}{4}$, rezultat ce permite aproximarea numărului π prin numere raționale și evaluarea erorii făcute. Analog se obține $S(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Exercițiul 2.3.2. Să se determine mulțimea de convergență a seriei:

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2+n+1} \cdot \left(\frac{x^2-2}{1-2x^2} \right)^n, x^2 \neq \frac{1}{2}.$$

Soluție.

Dacă se notează $\frac{x^2-2}{1-2x^2} = y$ se obține o serie de puteri cu coeficienții $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2+n+1}$, $n \in \mathbf{N}$. Raza de convergență a acestei serii de puteri este $r = 1$ deoarece $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$. Mulțimea de convergență a seriei $\sum_{n \geq 0} a_n y^n$ este [-1, 1]. Mulțimea de convergență a seriei date se obține acum rezolvând $-1 \leq \frac{x^2-2}{1-2x^2} \leq 1$, de unde rezultă $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Exercițiul 2.3.3. Fie $f: (0, \infty) \to \mathbf{R}$ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$.

a) Arătați că f este continuă pe $(0, \infty)$

b) *Calculați* $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx$

Soluție.

Dacă se notează $e^{-x} = y$ se obține o serie de puteri a cărei rază de convergență este 1. Rezultă că seria dată, a cărei sumă este funcția f, este convergentă punctual pe $(0, \infty)$, este convergentă uniform pe orice interval compact inclus în $(0, \infty)$, iar seria poate fi integrată termen cu termen. Astfel:

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\ln 2}^{\ln 3} ne^{-nx}dx = \sum_{n=1}^{\infty} -e^{-nx}\Big|_{\ln 2}^{\ln 3} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^{n\ln 2}} - \frac{1}{e^{n\ln 3}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Exercițiul 2.3.4. Să se arate că funcțiile $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ și $h(x) = e^x$ $x \in \mathbf{R}$ sunt dezvoltabile în serie de puteri pe $\mathbf{R}$ și să se determine seriile corespunzătoare.

Soluție.

Prin inducție se arată că $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$,

$g^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ și $h^{(n)}(x) = e^x$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbf{N}$.

Deoarece $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ și $|g^{(n)}(x)| \leq 1$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbf{N}$ rezultă că f și g sunt dezvoltabile în serie de puteri pe $\mathbf{R}$.

Pentru orice $a > 0$ şi orice $x \in [-a, a]$ şi $n \in \mathbf{N}$ avem $0 < h^{(n)}(x) \leq e^a$, deci h este dezvoltabilă în serie de puteri pe orice interval de forma $[-a, a]$ deci este dezvoltabilă pe $\mathbf{R}$.

Pentru $n = 2m$ avem $f^{(n)}(0) = \sin m\pi = 0$, $g^{(n)}(0) = \cos m\pi = (-1)^m$, iar pentru $n = 2m+1$, $f^{(n)}(0) = \sin\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^m$ şi $g^{(n)}(0) = 0$.

Rezultă dezvoltările:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

Cum $h^{(n)}(0) = e^0 = 1$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$ rezultă dezvoltarea

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

Exerciţiul 2.3.5. Să se dezvolte în serie de puteri funcţia:

$$f(x) = (1 + x)^\alpha \text{ cu } x > -1, \alpha \in \mathbf{R}$$

Soluţie.

Prin inducţie se demonstrează că

$$f^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1) \cdot (1 + x)^{\alpha - n}, \text{ deci}$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1).$$

Se obţine dezvoltarea

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

pentru $|x| < 1$.

Exercițiul 2.3.6. Să se dezvolte în serie de puteri funcția

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right),\ x \in \mathbf{R}.$$

Soluție.

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbf{R}$. Pentru $|x| < 1$ avem: $f'(x) = (1+x^2)^{-1/2} =$

$$= 1 - \frac{1}{2 \cdot 1!} x^2 + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^{2n} + \ldots$$ de unde, prin

integrare, rezultă $f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot x^{2n+1}$ pentru

orice $x \in (-1, 1)$.

Exercițiul 2.3.7. Să se calculeze $\frac{1}{\sqrt{e}}$ cu șase zecimale exacte.

Soluție.

În dezvoltarea $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ punând $x = -\frac{1}{2}$, obținem

$\frac{1}{\sqrt{e}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}$. Cum într-o serie alternată eroarea este inferioară

primului termen neglijat, din $\frac{1}{2^n n!} < \frac{1}{10^6}$, prin încercări se obține $n = 7$,

deci

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 1 - \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{4 \cdot 2!} - \frac{1}{8 \cdot 3!} + \frac{1}{16 \cdot 4!} - \frac{1}{32 \cdot 5!} + \frac{1}{64 \cdot 6!} = \ldots$$

Exerciţiul 2.3.8. Să se calculeze cu trei zecimale exacte $\int_0^1 \cos x^2 dx$.

Soluţie.

Din $\cos x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbf{R}$, obţinem

$$\int_0^1 \cos x^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \int_0^1 x^{4n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{1}{4n+1}$$

Calculând suma primilor cinci termeni prin transformarea lor în fracţii zecimale, prin lipsă şi prin adaos acolo unde transformarea nu se face exact, cu patru zecimale, obţinem

$0{,}9035 < \int_0^1 \cos x^2 dx < 0{,}9036$, deci $\int_0^1 \cos x^2 dx$ este aproximată cu trei zecimale exacte prin 0,903.

2.4. Exerciţii propuse

Exerciţiul 2.4.1. Să se determine mulţimea de convergenţă a seriilor următoare:

a) $\sum_{n\geq 1} n! x^n$, $x \in \mathbf{R}$ b) $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$, $x \in \mathbf{R}$

c) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$, $x \in \mathbf{R}$ d) $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n$, $x \in \mathbf{R}$

e) $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{3^{n/2}\sqrt{1+n^2}} \operatorname{tg}^n x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

R. a) $\{0\}$, b) $\mathbf{R}$, c) $[-1, 1]$, d) $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$, e) $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.

Exercițiul 2.4.2. Să se determine mulțimea de convergență și suma seriilor de puteri:

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}, x \in \mathbf{R}$

b) $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}, x \in \mathbf{R}$

R. a) $f(x) = \frac{1}{2} arctg\, x + \frac{1}{4} ln \frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$; b) $f(x) = (x+1)ln\,(x+1) - x$ $x \in (-1, 1)$.

Exercițiul 2.4.3. Să se determine sumele următoare, folosind seriile de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{4n-3}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(2n-1)}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{6n+1}$ e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$

Indicație:

a) Se folosește relația $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ și teorema de integrare termen cu termen a unei serii de puteri:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_0^1 x^{3n-3} dx = \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{3n-3} \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-x^3)^{n-1} \right] dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right).$$

b) Se procedează ca mai sus.

c) Se observă că $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{2}{2n-1}-\frac{1}{n}\right] =$

$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, a căror sumă se determină folosind teorema de derivare termen cu termen a unei serii de puteri. Suma cerută se obţine pentru $x = 1$.

d) Se foloseşte seria de puteri $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{6n+1}}{6n+1}$ şi teorema de derivare termen cu termen.

e) Se descompune $\frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$ în fracţii simple.

R. a) $\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$, b) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\pi}{2}\right]$, c) $\frac{\pi}{2}$ - *ln* 2,

d) $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln(7+4\sqrt{3})+\frac{\pi}{6}$, e) $\frac{\pi}{8}$.

Exerciţiul 2.4.4. Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma următoarelor serii de puteri:

a) $\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n$

b) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}x^{n+2}$

c) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^n$

d) $\sum_{n\geq 1}\frac{2n+2}{2n+1}x^{2n+1}$

R. a) $S(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $x \in (-1, 1)$; b) $S(x) = -\dfrac{(1-x)^2}{2} \ln(1-x) - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3x^2}{4}$

$x \in (-1, 1)$ iar în -1 şi 1 se prelungeşte prin continuitate; c) $S(x) = \ln \dfrac{2-x}{4}$,

$x \in (-\infty, 0]$; d) $S(x) = \dfrac{2x^3 - x}{1-x^2} + \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$.

Exerciţiul 2.4.5. Să se calculeze $s = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(4n+1)} \cdot \dfrac{1}{3^{2n}}$.

R. Se studiază seria de puteri $\sum_{n \geq 0} \dfrac{1}{(4n+1)3^{2n}} \cdot x^{4n+1}$.

Se obţine $S(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \ln \dfrac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $x \in \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ şi

$s = S(1) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \ln(2+\sqrt{3}) + \dfrac{\pi\sqrt{3}}{12}$.

Exerciţiul 2.4.6. Să se dezvolte în serie de puteri următoarele funcţii indicând şi mulţimile de convergenţă:

a) $f(x) = \ln(1+x)$ b) $f(x) = \dfrac{2x-3}{(x-1)^2}$ c) $f(x) = \dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$

d) $f(x) = xe^{-2x}$ e) $f(x) = \sin 3x + x \cos 3x$ f) $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$

g) $f(x) = \ln(1 + x - 2x^2)$ h) $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$ i) $f(x) = (1+e^x)^3$

j) $f(x) = \int_0^x \dfrac{\sin t}{t} dt$

R. a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n}$, $x \in (-1, 1]$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^n$, $|x| < 1$,

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{2}{3^{n+1}}\right)x^n$, $|x|<1$, d) $x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n-1}x^n}{(n-1)!}$, $x\in\mathbf{R}$

e) $2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+2)3^{2n}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x\in\mathbf{R}$; f) $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x\in$ *(-1, 1)*

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n-1}{n}x^n$, $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$,

h) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{4n-3}x^{2n}}{(2n)!}$, $x\in\mathbf{R}$;

i) $8+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n+3^{n-1}}{n!}x^n$, $x\in\mathbf{R}$;

j) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$, $x\in$ *[0, ∞)*

Exercițiul 2.4.7. Fie $f(x)=\arcsin x$, $x\in$ *[-1, 1]*

a) Să se dezvolte această funcție în serie de puteri ale lui x

b) Folosind această dezvoltare să se calculeze suma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2}{(2n+2)!2^{2n+2}}.$$

Indicație:

a) Se derivează funcția și se dezvoltă derivata în serie de puteri. Prin integrare termen cu termen se obține, pentru $x\in$ *(-1, 1)*

$$\arcsin x = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Deoarece $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{\sqrt{(2n+1)^3}}$, dezvoltarea se prelungește la intervalul [-1, 1].

b) Deoarece $\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$, integrând termen cu termen seria de la a), punând $x = 0$ se obține $c = -1$, deci

$$\frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} \frac{1}{2n+2} x^{2n+2} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} - 1$$

Pentru $x = \frac{1}{2}$ obținem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} \frac{1}{2n+2} \frac{1}{2^{2n+2}} =$

$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{8}$. Deoarece $(2n + 2)! = (2n - 1)!!(2n)!!(2n + 1)(2n + 2)$ rezultă că suma cerută este $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{8}$.

Exercițiul 2.4.8. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcția

$f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^2$.

Indicație:

Folosind dezvoltarea funcției *arcsin x*, pentru $x \neq 0$, se obține dezvoltarea în serie de puteri a funcției $\frac{\arcsin x}{x}$ și apoi se ridică la pătrat.

Exercițiul 2.4.9. Să se calculeze cu trei zecimale exacte integralele următoare:

a) $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx$ b) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$

c) $\int_0^{1/4} e^{-x^2} dx$ d) $\int_{0.1}^1 \frac{e^x}{x} dx$

R. a) 1, 605...; b) 0, 927...; c) 0, 244...; d) 3, 518...

3. FUNCŢII CONTINUE DE MAI MULTE VARIABILE REALE

3.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale.

3.1.1. Spaţiul euclidian $\mathbf{R}^p$

Pentru $p \in \mathbf{N}^*$, $p \geq 2$ fixat, se defineşte

$$\mathbf{R}^p = \underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}}_{\text{de p ori}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p) : x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbf{R}\}$$

De exemplu, $\mathbf{R}^2 = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R}\}$

$\mathbf{R}^3 = \{(x, y, z): x, y, z \in \mathbf{R}\}$

Mulţimea $\mathbf{R}^p$ poate fi înzestrată cu o structură algebrică de *spaţiu vectorial real*, definind adunarea şi înmulţirea cu scalari prin:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) + (y_1, y_2, \ldots, y_p) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_p + y_p)$$

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_p) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_p)$$

pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_p), (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in \mathbf{R}^p$ şi $\alpha \in \mathbf{R}$.

În timp ce mulţimea numerelor reale este total ordonată, între elementele mulţimii $\mathbf{R}^p$ nu poate fi definită o relaţie de ordine totală compatibilă cu structura algebrică, de aceea unele proprietăţi ale funcţiilor reale de o variabilă reală (legate de monotonie, spre exemplu) nu se pot enunţa în cazul funcţiilor reale de mai multe variabile reale (funcţii definite pe o parte $A \subseteq \mathbf{R}^p$ cu valori în $\mathbf{R}$).

Structura de bază însă cu care trebuie să fie dotate mulţimile pentru studiul caracteristic analizei matematice, bazat pe noţiunea de limită, este cea de spaţiu topologic, în care se poate exprima faptul că două elemente sunt sau nu *apropiate*, cu ajutorul noţiunii de vecinătate, în cazul general, sau cu ajutorul noţiunii de metrică (sau distanţă) în cazurile uzuale.

Definiția 3.1.1.1. Dacă X este o mulțime nevidă astfel încât, pentru fiecare $x \in X$, să poată fi evidențiată o familie $\mathcal{V}(x)$ de submulțimi ale lui X cu proprietățile:

$[V_1]$ oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(x)$, $x \in V$;

$[V_2]$ dacă $U, V \in \mathcal{V}(x)$ atunci $U \cap V \in \mathcal{V}(x)$;

$[V_3]$ dacă $V \in \mathcal{V}(x)$ și $V \subseteq A$ atunci $A \in \mathcal{V}(x)$;

$[V_4]$ oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(x)$ există $W \in \mathcal{V}(x)$ încât $V \in \mathcal{V}(y)$ pentru orice $y \in W$,

atunci se spune că pe X este definită o *structură topologică (sau o topologie)* . Mulțimea X se numește în acest caz *spațiu topologic*, iar familia $\mathcal{V}(x)$ se numește *sistem de vecinătăți ale punctului x*.

Definiția 3.1.1.2. Fie X o mulțime nevidă, arbitrară. Funcția $d : X \times X \to \mathbf{R}$ satisfăcând proprietățile:

$[D_1]$ $d(x, y) \geq 0$ pentru orice $x, y \in X$; $d(x, y) = 0$ dacă și numai dacă $x = y$

$[D_2]$ $d(x, y) = d(y, x)$ pentru orice $x, y \in X$

$[D_3]$ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pentru orice $x, y, z \in X$

se numește *metrică* (distanță) pe X, iar perechea (X, d) se numește *spațiu metric*.

Dacă (X, d) este un spațiu metric, $x \in X$, $r \in \mathbf{R}$, $r>0$, atunci mulțimea:

$$S(x, r) = \{y \in X: d(y, x) < r\}$$

se numește *sferă deschisă cu centrul în x și raza r*.

Teorema 3.1.1.1. Dacă (X, d) este un spațiu metric, pentru fiecare $x \in X$, familia $\mathcal{V}(x) = \{V \subset X: \exists\ r>0,\ S(x, r) \subset V\}$ formează un sistem de vecinătăți ale punctului x; deci orice spațiu metric este în mod natural un spațiu topologic.

În plus, pentru orice $x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ are două proprietăți remarcabile:

1) Dacă $x, y \in X$, $x \neq y$ atunci există $U \in \mathcal{V}(x)$, $V \in \mathcal{V}(y)$ astfel încât $U \cap V = \emptyset$ (proprietatea de separare)

2) Există $(V_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \subset \mathcal{V}(x)$ astfel încât:

- oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(x)$ există $n_0 \in \mathbf{N}^*$ încât $V_{n_0} \subset V$

- dacă $n, m \in \mathbf{N}^*$, $n \leq m$ atunci $V_n \supset V_m$ (această proprietate este cunoscută sun numele de *prima axiomă a numărabilității*)

Aceste proprietăţi permit rezolvarea unor probleme mari (unicitatea limitei, caracterizarea limitei şi continuităţii unei funcţii cu ajutorul şirurilor, etc) la nivelul spaţiilor metrice, la fel ca în cazul axei reale.

Observaţia 3.1.1.1. Structura de spaţiu metric pe X **nu** presupune existenţa unei structuri algebrice pe X.

Revenind la $\mathbf{R}^p$ care este înzestrat cu o structură algebrică pe spaţiu vectorial real, putem defini în mod natural o structură de spaţiu metric (deci o structură topologică) utilizând două noţiuni particulare importante, produsul scalar şi norma, care se definesc numai în spaţii vectoriale.

Definiţia 3.1.1.3. *Produsul scalar euclidian* între elementele lui $\mathbf{R}^p$ este definit prin:

$$<x, y> = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_py_p$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in \mathbf{R}^p$.

Norma euclidiană pe $\mathbf{R}^p$ este generată de produsul euclidian:

$$\|x\| = \sqrt{<x, x>} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2}$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbf{R}^p$.

Distanţa euclidiană este generată de norma euclidiană:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_p - y_p)^2}$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in \mathbf{R}^p$.

Se demonstrează uşor că d satisface proprietăţile $[D_1]$, $[D_2]$, $[D_3]$ din definiţia 3.1.1.2., deci $(\mathbf{R}^p, d)$ este spaţiu metric şi, prin urmare, spaţiu topologic; sistemul de vecinătăţi ale fiecărui punct din $\mathbf{R}^p$ se defineşte ca în teorema 3.1.1.1.

Observaţia 3.1.1.2. a) Pentru $p = 1$ avem $\|x\| = |x|$, distanţa euclidiană este $d(x, y) = |x - y|$, iar pentru $\varepsilon > 0$ şi $x_0 \in \mathbf{R}$, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbf{R}, |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

b) Pentru $p = 2$, dacă $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, avem $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ care reprezintă lungimea segmentului ce uneşte punctele $O(0, 0)$ şi $A(x, y)$; distanţa euclidiană este:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_2)^2}$$

iar pentru $\varepsilon > 0$ şi $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ fixat,

$$S((x_0, y_0), \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}$$

este interiorul cercului cu centrul în (x_0, y_0) şi raza ε, adică **discul** cu centrul în (x_0, y_0) şi raza ε.

c) Pentru $p = 3$, avem $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, iar distanţa euclidiană este:

$$d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

pentru $\varepsilon > 0$ şi $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}^3$ fixat,

$S((x_0, y_0, z_0), \varepsilon) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \varepsilon^2\}$

este interiorul sferei geometrice cu centrul în (x_0, y_0, z_0) şi raza ε.

3.1.2. Şiruri în $\mathbf{R}^p$.

Definiţia 3.1.2.1. Se numeşte *şir de elemente din* $\mathbf{R}^p$ orice **funcţie** $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}^p$; pentru orice $n \in \mathbf{N}$, termenul de rang n, $x_n = f(n) \in \mathbf{R}^p$, deci este de forma $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots x_n^p)$ unde $x_n^1, x_n^2, \ldots x_n^p \in \mathbf{R}$. Pentru **fiecare** $k = 1, 2, \ldots p$ fie $f_k: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f_k(n) = x_n^k$. Şirurile $f_1, f_2, \ldots, f_p$ **de numere** reale se numesc *şiruri componente ale şirului f.*

Considerând $\mathbf{R}^p$ înzestrat cu metrica euclidiană, **se pot** defini, la fel ca pentru şirurile de numere reale, noţiunile de **punct limită**, punct de acumulare, şir convergent, şir fundamental.

Definiţia 3.1.2.2. Fie $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}^p$; $f(n) = x_n$ un şir de **elemente din** $\mathbf{R}^p$. Şirul f se numeşte *convergent* dacă există $x \in \mathbf{R}^p$ astfel **încât pentru** orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in \mathbf{N}$ încât, oricare ar fi $n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \varepsilon$. **Elementul** x se numeşte *punct limită* pentru şirul f. În caz contrar, **şirul** f se numeşte *divergent*. Şirul f se numeşte *şir fundamental* (sau **şir Cauchy**) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in \mathbf{N}$ încât, dacă $n, m \in \mathbf{N}$ $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ **atunci** $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ sau, echivalent, $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ pentru **orice** $n \geq n_0$ şi orice $p \in \mathbf{N}$.

Teorema următoare stabileşte faptul că **studiul şirurilor** din $\mathbf{R}^p$, $p > 1$ se reduce la studiul şirurilor din $\mathbf{R}$ şi că $\mathbf{R}^p$ **înzestrat** cu distanţa euclidiană este un spaţiu metric complet.

Teorema 3.1.2.1. Fie $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}^p$, $f(n) = x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^p)$ un şir de elemente din $\mathbf{R}^p$. Pentru fiecare $k = 1, 2, \ldots, p$ fie $f_k: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f_k(n) = x_n^k$.

a) Şirul f este convergent şi are limita $x = (x^1, x^2, ..., x^p) \in \mathbf{R}^p$ dacă şi numai dacă şirurile componente $f_1, f_2, ...f_p$ sunt convergente şi $x^k = \lim_{n\to\infty} x_n^k$, $k = 1,2,...,p$

b) Şirul f este şir fundamental dacă şi numai dacă toate şirurile componente sunt şiruri fundamentale.

c) Şirul f este convergent dacă şi numai dacă el este şir fundamental, deci $\mathbf{R}^p$ în raport cu distanţa euclidiană este spaţiu metric complet.

Observaţia 3.1.2.1. a) Din această teoremă deducem că limita unui şir convergent din $\mathbf{R}^p$ se calculează pe componente.

De exemplu, şirul $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}^2, f(n) = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{n+1}{n+2}\right)$ converge către (0, 1).

b) În $\mathbf{R}^p$, $p \geq 2$ nu se pot defini convenabil şiruri monotone, ca în cazul şirurilor de numere reale, deoarece în $\mathbf{R}^p$, $p \geq 2$ nu se poate introduce o relaţie de ordine totală compatibilă cu structura algebrică.

3.1.3. Limita unei funcţii de mai multe variabile

Este cunoscută, din liceu, noţiunea de limită a unei funcţii reale de o variabilă reală într-un punct de acumulare al domeniului său de definiţie. Prezentăm acum această noţiune pentru funcţii definite pe o parte $A \subseteq \mathbf{R}^p$ cu valori în $\mathbf{R}$. Este necesar să precizăm, mai întâi, noţiunea de punct de acumulare al unei mulţimi $A \subseteq \mathbf{R}^p$. Acest lucru este posibil la fel ca în $A \subseteq \mathbf{R}$ deoarece cunoaştem sistemul de vecinătăţi ale fiecărui punct din $\mathbf{R}^p$.

Definiţia 3.1.3.1. Considerăm $\mathbf{R}^p$ înzestrat cu metrica euclidiană.

Fie $A \subseteq \mathbf{R}^p$, $x \in \mathbf{R}^p$ arbitrare. Elementul x se numeşte *punct de acumulare* pentru mulţimea A, dacă oricare ar fi $U \in \mathcal{V}(x)$ avem $(U\setminus\{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Mulţimea tuturor punctelor de acumulare ale mulţimii A se notează A'.

Definiţia 3.1.3.2. Fie $A \subseteq \mathbf{R}^p, f: A \to \mathbf{R}$ o funcţie arbitrară, $l \in \mathbf{R}$, $a \in A'$. Elementul l se numeşte *limita funcţiei f în punctul a* dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât oricare ar fi $x \in (U\setminus\{a\}) \cap A$ avem $f(x) \in V$. Se notează $l = \lim_{x\to a} f(x)$.

Observaţia 3.1.3.1. a) Deoarece $a \in A'$, $(U \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$ oricare ar fi $U \in \mathcal{V}(a)$. Deoarece există elemente ale mulţimii A oricât de „aproape" de a, iar funcţia f ia în acestea valori oricât de „aproape" de l. De aceea, spunem că l este limita funcţiei f când x „tinde" la a, „se apropie" oricât de mult de a. Este evident că nu are sens să ne punem problema limitei unei funcţii într-un punct care nu este punct de acumulare pentru domeniul său de definiţie.

b) Definiţia punctului de acumulare al unei mulţimi, precum şi definiţia limitei unei funcţii într-un punct pot fi extinse, cu aceeaşi formulare, la cazul spaţiilor topologice oarecare deoarece utilizează doar noţiunea de vecinătate. Considerarea spaţiilor metrice concrete (care sunt spaţii topologice particulare) prezintă unele avantaje cum ar fi unicitatea limitei, caracterizarea ei cu şiruri, care nu se regăsesc în cazul general.

Teorema 3.1.3.1. Fie $f : A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ o funcţie arbitrară, $a \in A'$. Dacă funcţia f are limită în punctul a, atunci aceasta este unică.

Teorema 3.1.3.2. Fie $f : A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $a \in A'$, $l \in \mathbf{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$;

b) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât, pentru orice $x \in A$ cu $0 < d(x, a) < \delta$ să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$;

c) oricare ar fi şirul $(x_n)_n \in \mathbf{N}$ de elemente din mulţimea $A \setminus \{a\}$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ avem $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

Observaţia 3.1.3.2. a) Dacă $f, g : A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $a \in A'$, $l \in \mathbf{R}$ dacă există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in (U \setminus \{a\}) \cap A$ avem $|f(x) - l| \leq g(x)$ şi dacă $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ atunci, evident, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

b) Dacă $x = (x^1, x^2, \ldots, x^p)$, $a = (a^1, a^2, \ldots, a^p)$ atunci

$$d(x, a) = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} (x^k - a^k)^2}$$

ţinând cont de dubla inegalitate evidentă:

$$|x^i - a^i| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{p}(x^k - a^k)^2} \le \sum_{k=1}^{p}|x^k - a^k|, i = 1, 2, \ldots, p$$

rezultă imediat că $l = \lim_{x \to a} f(x)$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ încât pentru orice $x = (x^1, x^2, \ldots, x^p) \in A$ cu $0 < |x^i - a^i| < \delta$, $i = 1, 2, \ldots, p$ să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

c) Dacă există două şiruri $(a_n)_n \in \mathbf{N}$ şi $(b_n)_n \in \mathbf{N}$ de elemente din $A \setminus \{a\}$ cu $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = a$ astfel încât $\lim_{n \to \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \to \infty} f(b_n)$ atunci, evident, funcţia f nu are limită în punctul a.

Pentru o funcţie reală de p variabile reale putem defini o noţiune particulară de limită, şi anume, limita după o direcţie.

Definiţia 3.1.3.3. Dacă $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $a \in A'$, atunci pentru orice vector $v \neq 0$ din $\mathbf{R}^p$, se numeşte *limita funcţiei f în punctul a după direcţia lui v* (atunci când există) numărul $\lim_{t \to 0} f(a + tv)$

Observaţia 3.1.3.3. a) Evident, punctele $x = a + tv$ au proprietatea că vectorul $x - a$ este coliniar cu v ceea ce justifică terminologia.

b) Dacă există $l = \lim_{x \to a} f(x)$ atunci există şi limita funcţiei f în punctul a, după direcţia lui v şi este egală cu l. Reciproca acestei afirmaţii este falsă.

Funcţia $f(x, y) = \dfrac{y^2 - 2x}{y^2 + 2x}$, $y^2 + 2x \neq 0$ are limita -1 în $(0, 0)$ pe orice direcţie dar $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ nu există, aşa cum se constată considerând şiruri $\left(\left(\dfrac{\lambda}{n^2}, \dfrac{1}{n}\right)\right)_{n \in N^*}$ cu λ parametru real.

3.1.4. Funcţii de mai multe variabile continue într-un punct.

Definiţia 3.1.4.1. Fie $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $a \in A \cap A'$. Funcţia f se numeşte *continuă în punctul a* dacă există $\lim_{x \to a} f(x)$ şi $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Dacă funcţia f nu este continuă în punctul a, spunem că f este discontinuă în acest punct.

Folosind definiţia 3.1.3.2. a limitei unei funcţii într-un punct, precum şi teorema 3.1.3.2. pentru $l = f(a)$ rezultă imediat:

Teorema 3.1.4.1. Fie $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $a \in A \cap A'$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) f este continuă în punctul a;
b) pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(f(a))$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât oricare ar fi $x \in U \cap A$ avem $f(x) \in V$;
c) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A$ cu $d(x, a) < \delta$ avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$
d) pentru orice şir $(x_n)_n \in \mathbf{N}$ de elemente din mulţimea A cu $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ avem $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$

Ţinând seama de observaţia 3.1.3.2. obţinem:

Observaţia 3.1.4.1. a) Dacă $f, g: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $a \in A \cap A'$ dacă există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$ avem $|f(x) - f(a)| \leq g(x)$ şi dacă $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ atunci, evident, f este continuă în punctul a.

b) Dacă $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $a = (a^1, a^2, \ldots, a^p) \in A \cap A'$, f este continuă în punctul a dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ încât pentru orice $x = (x^1, x^2, \ldots, x^p) \in A$ cu $|x^i - a^i| < \delta$, $i = 1,2, \ldots, p$ avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

c) Dacă există un şir $(a_n)_n \in \mathbf{N}$ de elemente din A cu $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ astfel încât $\lim_{n \to \infty} f(a_n) \neq f(a)$ atunci, evident, funcţia f nu este continuă în punctul a.

Folosind noţiunea de limită după o direcţie introdusă în definiţia 3.1.3.3. obţinem:

Definiţia 3.1.4.2. Funcţia $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ este *continuă în punctul* $a \in A \cap A'$ *după direcţia vectorului* $v \neq 0$ dacă $\lim_{t \to 0} f(a + tv) = f(a)$.

În particular, dacă vectorul v are toate componentele nule, cu excepția componentei a i-a și funcția f este continuă după direcția lui v în punctul a, spunem că f este *continuă parțial în raport cu variabila* x^i în punctul a. Evident, i poate lua oricare dintre valorile $1, 2, \ldots, p$. Având în vedere observația 3.1.3.3. b) rezultă că dacă f este continuă în punctul a atunci ea este continuă după orice direcție în acest punct; în particular, ea este continuă parțial în raport cu fiecare variabilă $x^1, x^2, \ldots, x^p$ separat în punctul a, reciproca nefiind, în general, adevărată.

3.1.5. Funcții continue pe o mulțime.

În teorema 3.1.1.1. am prezentat un mod de a introduce o structură topologică într-un spațiu metric cu ajutorul noțiunii de vecinătate a unui punct. Prezentăm acum, în același cadru, noțiunile de mulțime deschisă, respectiv închisă, acestea fiind importante, deoarece, cu ajutorul lor, putem caracteriza continuitatea funcțiilor pe o mulțime și putem obține proprietăți ale funcțiilor continue pe mulțimi particulare (compacte, conexe).

Definiția 3.1.5.1. Fie (X, d) un spațiu metric, $G \subseteq X$, $G \neq \emptyset$. Mulțimea G se numește *mulțime deschisă* dacă ea este vecinătate pentru fiecare punct al său. Prin definiție mulțimea vidă se consideră mulțime deschisă. Notăm $\mathcal{G}$ familia tuturor mulțimilor deschise. Mulțimea $F \subseteq X$ se numește *închisă* dacă complementara sa este mulțime deschisă. Notăm cu $\mathcal{F}$ familia tuturor mulțimilor închise. Deci:

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X) : CF \in \mathcal{G}\}$$

Observația 3.1.5.1. Mulțimile $\emptyset$ și X sunt în același timp mulțimi deschise și mulțimi închise. Există și mulțimi care nu sunt nici deschise nici închise. De exemplu, intervalele [a, b), (a, b] unde $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ nu sunt nici mulțimi deschise, nici mulțimi închise ale axei reale înzestrată cu metrica euclidiană.

Definiția 3.1.5.2. Fie (X, d) un spațiu metric, $A \subseteq X$ o submulțime arbitrară. Fie $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ o familie de părți ale spațiului X. Familia $\mathcal{A}$ se numește *acoperire* pentru mulțimea A dacă $A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Dacă acoperirea $\mathcal{A}$ este formată din mulțimi deschise, atunci $\mathcal{A}$ se numește *acoperire deschisă* a mulțimii A.

Mulțimea A se numește *compactă* dacă din orice acoperire deschisă a mulțimii A putem extrage o acoperire finită a lui A (adică oricare ar fi $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{G}$ cu proprietatea că $A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ există $n \in \mathbf{N}^*$, există $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subset I$ încât $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_{i_k}$)

Mulțimea A se numește *secvențial compactă* (compactă prin șiruri) dacă orice șir de puncte din A are cel puțin un subșir convergent în A. Mulțimea A se numește *mărginită* dacă există $x_0 \in X$ și $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$ încât $A \subseteq S(x_0, r)$.

Observația 3.1.5.2. Definițiile 3.1.5.1. , 3.1.5.2. fără noțiunea de mulțime mărginită pot fi extinse, cu aceeași formulare, la cazul spațiilor topologice oarecare deoarece utilizează doar noțiunea de vecinătate. În spații metrice însă există o strânsă legătură între aceste noțiuni.

Teorema 3.1.5.1. Fie (X, d) un spațiu metric și $A \subseteq X$.

a) Dacă A este compactă, atunci A este închisă și mărginită
b) A este compactă dacă și numai dacă A este secvențial compactă.

Observația 3.1.5.3. Din această teoremă rezultă ușor că:

a) Orice interval închis și mărginit [a, b] de pe axa reală înzestrată cu metrica euclidiană este mulțime compactă;
b) Mulțimea $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_p, b_p] \subseteq \mathbf{R}^p$, $p \geq 2$ este o mulțime compactă;
c) O submulțime $A \subset \mathbf{R}^p$ este compactă dacă și numai dacă este închisă și mărginită.

Definiția 3.1.5.3. Funcția $f : A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ se numește *continuă pe mulțimea* A dacă este continuă în orice punct din A .

Observația 3.1.5.4. Ținând seama de teorema 3.1.4.1. c) deducem că funcția f este continuă pe mulțimea A dacă și numai dacă oricare ar fi $a \in A$ și oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât oricare ar fi $x \in A$ cu $d(x, a) < \delta$ avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

În general, δ depinde de ε și a . Dacă cerem ca δ să depindă numai de ε, obținem o condiție mai tare, aceea de *continuitate uniformă* a funcției f pe mulțimea A.

Definiţia 3.1.5.4. Funcţia $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ se numeşte *uniform continuă* pe mulţimea A dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât oricare ar fi x, $a \in A$ cu $d(x, a) < \delta$ avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Teorema care urmează stabileşte faptul că dacă A este compactă cele două condiţii sunt echivalente.

Teorema 3.1.5.2. Dacă funcţia $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ este continuă pe mulţimea A şi mulţimea A este compactă atunci f este uniform continuă pe A.

Observaţia 3.1.5.5. Dacă mulţimea A nu este compactă, există funcţii continue pe A care să nu fie uniform continue pe A. De exemplu, funcţia $f(x) = \ln x$ este continuă pe mulţimea $(0, 1]$ care nu este compactă, dar nu este uniform continuă pe această mulţime. Într-adevăr, există $\varepsilon_0 = 1$ astfel încât oricare ar fi $\delta > 0$ există $x_n = \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{1}{3n}$ cu $|x_n - a_n| = \frac{2}{3n} < \delta$ pentru care $|f(x_n) - f(a_n)| = |\ln x_n - \ln a_n| = \ln 3 > 1$.

Teorema următoare stabileşte faptul că noţiunea de mulţime compactă este un invariant continuu, adică proprietatea unei mulţimi de a fi compactă se păstrează când trecem la imaginea acesteia printr-o funcţie continuă.

Teorema 3.1.5.3. Dacă $A \subset \mathbf{R}^p$ este o mulţime compactă şi $f: A \to \mathbf{R}$ este continuă pe A, atunci imaginea directă a mulţimii A prin funcţia f este o submulţime compactă a lui $\mathbf{R}$.

Această teoremă poate fi demonstrată în cazul spaţiilor topologice generale, dar are consecinţe deosebit de importante pentru funcţiile cu valori reale.

Definiţia 3.1.5.5. Fie $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ o funcţie arbitrară. Funcţia f se numeşte *mărginită* dacă mulţimea $f(A)$ este mărginită. Se spune că funcţia f *îşi atinge marginile pe* A dacă $\inf f(A) \in f(A)$ şi $\sup f(A) \in f(A)$ adică există $a, b \in A$ încât $f(a) = \inf f(A)$ şi $f(b) = \sup f(A)$.

Teorema 3.1.5.4. Dacă $A \subseteq \mathbf{R}^p$ este o mulţime compactă şi $f: A \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă pe A, atunci f este mărginită şi îşi atinge marginile pe A.

Vom utilliza această teoremă în determinarea punctelor de extrem global pentru o funcţie de mai multe variabile.

O altă noţiune importantă care se defineşte cu ajutorul mulţimilor deschise este noţiunea de mulţime conexă.

Definiţia 3.1.5.6. Fie (X, d) un spaţiu metric $A \subseteq X$ o submulţime arbitrară. Mulţimea A se numeşte *conexă* dacă nu există două mulţimi deschise nevide G_1, G_2 în X încât: $G_1 \cap A \neq \emptyset$, $G_2 \cap A \neq \emptyset$, $G_1 \cap G_2 \cap A \neq \emptyset$ şi $A \subseteq G_1 \cup G_2$. Se numeşte *domeniu* în X, orice submulţime deschisă şi conexă a lui X.

Teorema următoare stabileşte faptul că proprietatea unei mulţimi de a fi conexă este un invariant continuu.

Teorema 3.1.5.5. Dacă $A \subseteq \mathbf{R}^p$ este o mulţime conexă şi $f: A \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă pe A, atunci imaginea directă a mulţimii A prin funcţia f este o submulţime conexă a lui $\mathbf{R}$.

Şi această teoremă poate fi demonstrată în cazul spaţiilor topologice generale. Ea are însă consecinţe importante în cadrul particular prezentat aici.

Observaţia 3.1.5.6. a) O submulţime $A \subseteq \mathbf{R}$ este conexă dacă şi numai dacă A este un interval.

b) Dacă $A \subseteq \mathbf{R}^p$ este o mulţime conexă, $f: A \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă pe A şi dacă există $a, b \in A$ astfel încât $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ atunci există $\xi \in A$ astfel ca $f(\xi) = 0$

3.1.6. Cazul funcţiilor vectoriale de variabilă vectorială.

Fie $A \subseteq \mathbf{R}^p$ şi $f: A \to \mathbf{R}^m$, $p \geq 2$, $m \geq 2$. O asemenea funcţie se numeşte *funcţie vectorială de variabilă vectorială* sau funcţie vectorială de p variabile reale, deoarece pentru orice $x \in A$, $x = (x^1, x^2, \ldots, x^p)$ cu $x^i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $f(x) = f(x^1, x^2, \ldots, x^p) = y = (y^1, y^2, \ldots, y^m) \in \mathbf{R}^m$.

Funcţiile $f_k: A \to \mathbf{R}$, $f_k(x) = y^k$, $k = 1, 2, \ldots, m$ sunt, evident, funcţii reale de p variabile reale şi se numesc *componentele funcţiei* f.

Considerând pe $\mathbf{R}^p$ şi $\mathbf{R}^m$ metrica euclidiană, dacă $a \in A'$ şi $l = (l^1, l^2, \ldots, l^m) \in \mathbf{R}^m$, prin analogie cu definiţia 3.1.3.2. putem enunţa:

Definiţia 3.1.6.1. Elementul l se numeşte *limita funcţiei f în punctul a* dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(l)$ există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât oricare ar fi $x \in (U/\{a\}) \cap A$ avem $f(x) \in V$.

Se poate demonstra:

Teorema 3.1.6.1. Elementul l este limita funcției f în punctul a dacă și numai dacă oricare ar fi șirul de elemente din $A/\{a\}$ cu $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ avem $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Ținând seama de teorema 3.1.2.1. referitoare la limita unui șir convergent din $\mathbf{R}^m$, deducem imediat:

Teorema 3.1.6.2. Funcția vectorială $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^m$ are limită în punctul $a \in A'$ dacă și numai dacă toate componentele sale au limită în acest punct. Trecerea la limită se face pe componente, adică

$$\lim_{x\to a} f(x) = (\lim_{x\to a} f_1(x), \lim_{x\to a} f_2(x), \ldots, \lim_{x\to a} f_m(x)).$$

Studiul funcției f se reduce la studiul celor m componente ale sale care sunt funcții reale de p variabile reale.

Prin analogie cu definiția 3.1.4.1. putem enunța:

Definiția 3.1.6.2. Fie $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^m$ $p \geq 2$, $m \geq 2$, $a \in A \cap A'$. Funcția f se numește *continuă în punctul a* dacă există $\lim_{x\to a} f(x)$ și $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Ținând seama de teorema 3.1.6.2. rezultă imediat:

Teorema 3.1.6.3. Funcția vectorială $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^m$ este continuă în punctul $a \in A \cap A'$ dacă și numai dacă toate componentele sale sunt continue în acest punct.

Referitor la continuitatea pe o mulțime avem:

Definiția 3.1.6.3. Funcția vectorială $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^m$ se numește continuă pe mulțimea A dacă este continuă în orice punct din A.

Teorema 3.1.6.4. Funcția vectorială $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^m$ este continuă pe mulțimea A dacă și numai dacă toate componentele sale sunt continue pe A.

Prin analogie cu teorema 3.1.5.5. se poate demonstra:

Teorema 3.1.6.5. Dacă $A \subseteq \mathbf{R}^p$ este o mulțime conexă și $f: A \to \mathbf{R}^m$ este o funcție vectorială continuă pe A, atunci imaginea directă a mulțimii A prin funcția f este o submulțime conexă a lui $\mathbf{R}^m$.

Observația 3.1.6.1. Această teoremă este importantă deoarece cu ajutorul ei putem recunoaște mulțimi conexe din $\mathbf{R}^m$.

a) Fie $a, b \in \mathbf{R}^m$ fixate. Segmentul închis de capete a, b definit prin

$[a, b] = \{(1 - t)a + tb, t \in [0, 1]\}$ este o mulțime conexă. Este suficient să observăm că funcția $f : [0, 1] \to \mathbf{R}^m$, $f(t) = (1 - t)a + tb$ este o funcție vectorială continuă pe mulțimea conexă $[0, 1]$ iar $[a, b] = f([0, 1])$.

b) O mulțime $S \subseteq \mathbf{R}^m$ cu proprietatea că există $a \in S$ astfel încât pentru orice $x \in S$, $[a, x] \subset S$ se numește *stelată*. Dacă S este stelată atunci S este conexă.

c) O mulțime $A \subseteq \mathbf{R}^m$ cu proprietatea că pentru orice $a, b \in A$ avem $[a, b] \subset A$ se numește *convexă*. Dacă A este convexă atunci A este stelată și, prin urmare, conexă.

d) Fie $A \subseteq \mathbf{R}^m$ o mulțime *deschisă*, nevidă. Atunci A este conexă dacă și numai dacă orice două puncte din A pot fi unite printr-o linie poligonală conținută în A (o linie poligonală de capete a, b este o submulțime $L \subset \mathbf{R}^m$ astfel încât există $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \in \mathbf{R}^m$ cu proprietatea că: $L = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots \cup [x_{n-1}, x_n] \cup [x_n, b]$).

3.2. Tipuri de probleme și metode de rezolvare,

Exercițiul 3.2.1. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_n \in \mathbf{N}$ de elemente din $\mathbf{R}^p$.

- Se studiază șirurile componente:
  - dacă toate șirurile componente sunt convergente atunci șirul dat este convergent;
  - dacă cel puțin un șir component nu este convergent atunci șirul nu este convergent.

Exercițiul 3.2.2. Să se determine limita șirului $(x_n)_n \in \mathbf{N}$ de elemente din $\mathbf{R}^p$.

- Se determină limita fiecărui șir component:

Dacă $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^p)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n^1, \lim\limits_{n\to\infty} x_n^2, \ldots, \lim\limits_{n\to\infty} x_n^p)$.

Exercițiul 3.2.3. Pentru o funcție $f : A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ și $a \in A'$ să se determine $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

- înlocuire directă, dacă nu se obțin operații fără sens

- folosind diverse substituţii se transformă într-o limită a unei funcţii de o variabilă, apoi se folosesc limite fundamentale sau metode specifice cunoscute din liceu
- folosirea criteriului cu şiruri (teorema 3.1.3.2): se consideră un şir $(x_n)_n \in \mathbf{N}$ cu $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ şi se determină $l = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$; apoi cu observaţia 3.1.3.2. a), dacă $|f(x) - l| \le g(x)$ într-o vecinătate a punctului a şi $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, atunci $l = \lim_{x\to a} f(x)$.

Exerciţiul 3.2.4. Pentru o funcţie $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ şi $a \in A'$ să se arate că f nu are limită în punctul a.

- se foloseşte observaţia 3.1.3.2. c): se arată că există două şiruri $(a_n)_n \in \mathbf{N}$ şi $(b_n)_n \in \mathbf{N}$ din $A\setminus\{a\}$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$.

Exerciţiul 3.2.5. Să se arate că funcţia $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ $f(x) = \ldots$ este continuă în punctul $a \in A \cap A'$.

- se foloseşte observaţia 3.1.4.1. a)

Exerciţiul 3.2.6. Să se arate că funcţia $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ $f(x) = \ldots$ nu este continuă în punctul $a \in A \cap A'$.

- se foloseşte observaţia 3.1.4.1. c)

Exerciţiul 3.2.7. Să se studieze continuitatea funcţiei funcţia $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$

- se determină domeniul de definiţie al funcţiei f
- se identifică mulţimea de puncte în care funcţia este continuă pentru că este obţinută prin operaţii cu funcţii continue
- se studiază continuitatea funcţiei în fiecare dintre punctele domeniului de definiţie exceptate la pasul anterior calculând limita corespunzătoare
- se precizează mulţimea de continuitate.

Exerciţiul 3.2.8. Să se arate că funcţia funcţia $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ este continuă după orice direcţie în punctul $a \in A \cap A'$ dar nu este continuă în acest punct .

- se arată că $\lim_{t\to 0} f(a + tv) = f(a)$, pentru orice v
- se arată apoi că f nu are limită în punctul a sau că $f(a)$ nu este limita funcției f în punctul a.

Exercițiul 3.2.9. Să se studieze continuitatea uniformă a funcției f pe mulțimea A.

- se verifică dacă A este mulțime compactă
- dacă A este compactă, din continuitatea lui f pe A rezultă continuitatea uniformă pe această mulțime
- dacă A nu este compactă, se verifică îndeplinirea condiției din definiție
- oricum ar fi A, dacă f nu este continuă pe A atunci nu este nici uniform continuă.

Exercițiul 3.2.10. Se dă $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$. Să se arate că ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție în A.

- se arată că A este o mulțime conexă
- se arată că f este continuă pe A
- se identifică $a, b \in A$ astfel încât $f(a) \cdot f(b) < 0$. Rezultă, conform observației 3.1.5.6.b) că ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție în A.

Exercițiul 3.2.11. Pentru o funcție dată $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^m$ și $a \in A'$ să se determine $\lim_{x\to a} f(x)$.

- se determină limita pe componente; pentru fiecare componentă se procedează ca in exercițiul 3.2.3.

Exercițiul 3.2.12. Pentru o funcție $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^m$ și $a \in A'$ să se arate că f nu are limită în punctul a.

- se arată că măcar o componentă nu are limită în a (ca în exercițiul 3.2.4)

Exercițiul 3.2.13. Să se arate că funcția $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^m$, $f(x) = \ldots$ este continuă în punctul $a \in A \cap A'$.

- se arată ca în exercițiul 3.2.5. că fiecare componentă este continuă

Exercițiul 3.2.14. Să se arate că funcția $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^m$, $f(x) = \ldots$ nu este continuă în punctul $a \in A \cap A'$.

- sc arată că măcar o componentă nu este continuă în a (ca în exercițiul 3.2.6)

Exercițiul 3.2.15. Să se studieze continuitatea funcției $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^m$.

- se procedează ca în exercițiul 3.2.7. pentru fiecare componentă. Mulțimea de continuitate a funcției f este intersecția mulțimilor de continuitate ale componentelor.

3.3. Exerciții rezolvate

Exercițiul 3.3.1. Studiați convergența următoarelor șiruri din $\mathbf{R}^3$.

a) $x_n = \left(\frac{n}{2n+1}, \frac{n^2}{n^2+1}, \frac{1}{n}\right)$

b) $x_n = \left(1-\frac{1}{n}, 3^{-n}, \cos\frac{1}{n}\right)$

c) $x_n = \left(\frac{1}{2+n}, (-1)^{n+1}, \frac{n+1}{n}\right)$

Soluții.

a) Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ deducem că șirul $(x_n)_n \in \mathbf{N}$ este convergent și limita sa este $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$.

b) Analog se obține

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}, 3^{-n}, \cos\frac{1}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right), \lim_{n\to\infty}(3^{-n}), \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= (1, 0, 1)$$

c) Deoarece a doua componentă a șirului $(x_n)_n \in \mathbf{N}$ este un șir divergent rezultă că $(x_n)_n \in \mathbf{N}$ este divergent.

Exercițiul 3.3.2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$

Soluții.

a) Deoarecc $\dfrac{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}$ și

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg} t}{t} = 1,\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$$

rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1\cdot 0 = 0.$

b) $$\frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{2\sin^2\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}{x^2+y^2} = 2\cdot\left(\frac{\sin\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{4},$$

(x, y) ≠ (0, 0).

Deoarece $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = 0$ și $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1$ deducem că

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}.$$

Exercițiul 3.3.3. Să se demonstreze că următoarele funcții nu au limită în *(0, 0)*.

a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, $x + y \neq 0$

b) $f(x, y) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot y}{e^{-\frac{2}{x^2}} + y^2}$, $x \neq 0$

Soluție.

a) Considerăm șirul $((x_n, y_n))_{n \in \mathbf{N}^*}$ de puncte din $\mathbf{R}^2$, $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{\lambda}{n}$ unde $\lambda \neq -1$ este un parametru real. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$, $f(x_n, y_n) = \dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$ depinde de parametrul λ. Prin urmare, funcția f nu are limită în *(0, 0)*.

b) Considerăm șirul $((x_n, y_n))_{n \in \mathbf{N}^*}$ de puncte din $\mathbf{R}^2$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $y_n = \lambda \cdot e^{-\frac{1}{x_n^2}}$, $n \in \mathbf{N}$ unde λ este un parametru real.

Atunci, evident $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$.

Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$, avem

$$f(x_n, y_n) = \frac{\lambda \cdot e^{-\frac{2}{x_n^2}}}{e^{-\frac{2}{x_n^2}} + \lambda^2 e^{-\frac{2}{x_n^2}}} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$ depinde de parametrul λ. Rezultă că funcția f nu are limită în *(0, 0)*.

Exercițiul 3.3.4. Să se demonstreze că următoarele funcții sunt continue în *(0, 0)*.

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, (x, y) \neq (0,0) \\ 0, \qquad\qquad (x, y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{y^2}\right), y \neq 0, x \in \mathbf{R} \\ 0, \qquad\qquad y = 0, x \in \mathbf{R} \end{cases}$

Soluție.

a) Prin înlocuire directă obținem: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ deci f este continuă în *(0, 0)*.

b) Pentru orice $(x, y) \neq (0, 0)$ avem:

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = (x^2 + y^2) \cdot \left|\sin\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| \leq x^2 + y^2$$

și, evident, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) = 0$. Ținând seama de observația 3.1.4.1. a) rezultă că funcția f este continuă în *(0, 0)*.

c) Pentru orice $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ cu $y \neq 0$, avem:

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = y^2 \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) \leq y^2 \cdot \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) = x^2 + y^2$$

de unde, ca mai sus, deducem că f este continuă în *(0, 0)*.

Exercițiul 3.3.5. Să se demonstreze că următoarele funcții nu sunt continue în $(0, 0)$:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y}, x+y \neq 0 \\ 0, \quad x+y=0 \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 1, \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

Soluție.

a) Funcția f nu are limită în $(0, 0)$ deci nu este continuă în $(0, 0)$.

b) Considerăm șirul $\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$ convergent către $(0, 0)$. Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$, avem $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^5} \cdot \frac{n^2}{2} = \frac{1}{2n^3}$.

Deci $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 0 \neq f(0, 0)$. Ținând seama de observația 3.1.4.1. c) deducem că f nu este continuă în $(0, 0)$. (Se poate arăta că această funcție are limită în $(0, 0)$ dar aceasta nu este 1).

Exercițiul 3.3.6. Să se studieze continuitatea funcțiilor:

a) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ a, \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

b) $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}, (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ a, \quad (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$

Soluţii.

a) Deoarece $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = 0$ rezultă că f este continuă în $(0, 0)$ dacă şi numai dacă $a = 0$. Cum f este continuă pe $\mathbf{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$ pentru orice $a\in \mathbf{R}$, fiind compunere de funcţii continue rezultă că dacă $a = 0$ funcţia f este continuă pe $\mathbf{R}^2$ iar dacă $a \neq 0$, ea este continuă pe $\mathbf{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$.

b) Pentru orice $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ avem:

$$\frac{1-\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{-x^2-y^2-z^2}{(1+\sqrt{1+x^2+y^2+z^2})(x^2+y^2+z^2)} =$$

$$= -\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$$

deci $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z) = -\dfrac{1}{2}$

Cum pe $\mathbf{R}^3\setminus\{(0, 0, 0)\}$ funcţia este evident continuă, deducem că pentru $a = -\dfrac{1}{2}$ funcţia este continuă pe $\mathbf{R}^3$ iar pentru $a \neq -\dfrac{1}{2}$ ea este continuă pe $\mathbf{R}^3\setminus\{(0, 0, 0)\}$.

Exerciţiul 3.3.7. Fie $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+|y^3|}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Să se demonstreze că funcţia f este continuă după orice direcţie în origine, dar f nu este continuă în origine.

Soluţie.

Fie *(d)* o dreaptă ce trece prin origine, de ecuaţie $y = mx$, $m \in \mathbf{R}$, $m \neq 0$. Restricţia funcţiei f la dreapta *(d)* este funcţia $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$g(x) = f(x, mx) = \begin{cases} \dfrac{m|x|}{|x|^3 + |m|^3}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Cum $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$ rezultă că g este continuă.

Dacă $m = 0$ dreapta (d) reprezintă axa Ox. În acest caz $g(x) = f(x, 0) = 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, deci g este evident continuă în acest caz. În sfârşit, dacă (d) este axa Oy restricţia va fi $h(y) = f(0, y) = 0$ pentru orice $y \in \mathbf{R}$, deci este continuă. Prin urmare, restricţia lui f la orice dreaptă ce trece prin origine este continuă în origine.

Considerăm acum şirul de puncte din $\mathbf{R}^2$, $\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$ care converge la $(0, 0)$ şi observăm că $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2}{2} = \infty$, deci f nu este continuă în $(0, 0)$.

Exerciţiul 3.3.8. Să se studieze continuitatea uniformă a următoarelor funcţii pe mulţimile A indicate:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1} + x$, $x \in \mathbf{R}$, $A = \mathbf{R}$

b) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $A = \left(0, \dfrac{1}{\pi}\right]$

c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $A = (0, \pi]$

d) $f(x) = \cos x^2$, $x \in \mathbf{R}$, $A = \mathbf{R}$

Soluţii.

a) Pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, avem:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| \cdot \left| 1 + \frac{x_1 + x_2}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} \right| \leq$$

$$|x_1 - x_2| \cdot \left[1 + \frac{|x_1|}{x_1^2 + 1} + \frac{|x_2|}{x_2^2 + 1} \right] \leq |x_1 - x_2| \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 2|x_1 - x_2|$$

Dacă $|x_1 - x_2| < \delta$ atunci $|f(x_1) - f(x_2)| < 2\delta$. Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta \in \left(0, \frac{\varepsilon}{2} \right]$ încât pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ cu $|x_1 - x_2| < \delta$ avem $|f(x_1) - f(x_2)| < 2\delta \leq \varepsilon$. Deci f este uniform continuă pe $\mathbf{R}$.

b) Evident, $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$, deci f este continuă în $x = 0$. Funcţia este continuă pe $\left(0, \frac{1}{\pi} \right]$, fiind compunere de funcţii continue. Rezultă că f este continuă pe $\left[0, \frac{1}{\pi} \right]$ care este interval compact, deci este uniform continuă pe $\left[0, \frac{1}{\pi} \right]$ ceea ce arată că este uniform continuă şi pe $\left(0, \frac{1}{\pi} \right]$.

c) Funcţia f este continuă pe $(0, \pi]$. Deoarece $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, putem prelungi f prin continuitate la intervalul compact $[0, \pi]$ astfel:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \in (0, \pi] \\ 1 \quad , x = 0 \end{cases}.$$

Deci, $\tilde{f}$ este continuă pe $[0, \pi]$ care e interval compact, prin urmare $\tilde{f}$ este uniform continuă pe $[0, \pi]$. Deoarece $A = (0, \pi] \subset [0, \pi]$ deducem că

$\tilde{f}$ este uniform continuă pe A. Dar, pe A, $\tilde{f} = f$. Astfel, funcția f este uniform continuă pe A .

d) Există $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ astfel încât, pentru orice $\delta > 0$, există $x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$,

$y_n = \sqrt{2n\pi}$ cu $n \in \mathbf{N}$ suficient de mare încât $|x_n - y_n| < \delta$ și

$|f(x_n) - f(y_n)| = = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2}$.

Prin urmare, f nu este uniform continuă pe $\mathbf{R}$.

Exercițiul 3.3.9. Să se studieze continuitatea uniformă a următoarelor funcții pe mulțimile A indicate:

a) $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$,

$A = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(0, 0)\}$

b) $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $A = \mathbf{R}^2$.

Soluție.

a) Funcția f este continuă pe mulțimea A. Deoarece $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1$,putem prelungi prin continuitate pe mulțimea $B = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ astfel:

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), (x, y) \in A \\ 1 \qquad , (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Deci $\tilde{f}$ este continuă pe mulțimea B, care este compactă, fiind mărginită și închisă, prin urmare $\tilde{f}$ este uniform continuă pe B. Deoarece $A \subset B$ deducem că $\tilde{f}$ este uniform continuă pe A. Dar, pentru orice $(x, y) \in A$, $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$. Rezultă astfel că funcția f este uniform continuă pe A.

b) Există $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ astfel încât, pentru orice $\delta > 0$, există $\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}+n\pi}, \sqrt{n\pi}\right)$ $\left(\sqrt{n\pi}, \sqrt{n\pi}\right) \in \mathbf{R}^2$ cu $n \in \mathbf{N}$, suficient de mare, depinzând de δ, încât

$$d\left(\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}+n\pi}, \sqrt{n\pi}\right), \left(\sqrt{n\pi}, \sqrt{n\pi}\right)\right) < \delta \text{ şi}$$

$$\left|f\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}+n\pi}, \sqrt{n\pi}\right) - f\left(\sqrt{n\pi}, \sqrt{n\pi}\right)\right| \geq \varepsilon_0.$$

Într-adevăr, $d\left(\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}+n\pi}, \sqrt{n\pi}\right), \left(\sqrt{n\pi}, \sqrt{n\pi}\right)\right) =$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{3}+n\pi} - \sqrt{n\pi} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\sqrt{\frac{\pi}{3}+n\pi}+\sqrt{n\pi}} < \delta \text{ pentru } n > n(\delta) \text{ deoarece}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{3\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}+n\pi}+\sqrt{n\pi}\right)} = 0.$$

Pe de altă parte, $\left|f\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}+n\pi}, \sqrt{n\pi}\right) - f\left(\sqrt{n\pi}, \sqrt{n\pi}\right)\right| =$

$$= \left|\cos\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right) - \cos 2n\pi\right| = \left|\frac{1}{2} - 1\right| = \frac{1}{2}.$$

Prin urmare, f nu este uniform continuă pe $\mathbf{R}^2$.

Exercițiul 3.3.10. Să se arate că funcția $f(x) = xa^x - 1$, $a > 1$ se anulează într-un punct $\xi \in (0, 1)$.

Soluție.

Funcția f este continuă pe $\mathbf{R}$ ca funcție elementară, deci are proprietatea lui Darboux pe $\mathbf{R}$. Cum $f(1) = a - 1 > 0$ și $f(0) = -1 < 0$, rezultă că există $\xi \in (0, 1)$ astfel încât $f(\xi) = 0$.

Exercițiul 3.3.11. Să se arate că funcția $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 2y + 1$ se anulează într-un punct din mulțimea $A = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Soluție. Mulțimea A este convexă, deci este și conexă: dacă $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $a, b \in A$ atunci $[a, b] \subset A$, adică $a_1^2 + a_2^2 \leq 1$, $b_1^2 + b_2^2 \leq 1$, $x = (1 - t)a_1 + tb_1$, $y = (1 - t)a_2 + tb_2$ implică $x^2 + y^2 \leq 1$. Funcția f este continuă pe $\mathbf{R}^2$, deci este continuă pe A.

Evident, $f(0, 0) = 1 > 0$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\sqrt{2} + 1 < 0$.

Conform observației 3.1.5.6. b), ecuația $f(x, y) = 0$ are cel puțin o soluție în A.

Exercițiul 3.3.12. Fie $A = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$ și $f: A \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Să se arate că există în A două puncte diametral opuse în care funcția are valori egale.

Soluție. Fie $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Evident γ este continuă și $\gamma([0, 2\pi]) = A$.

Fie g: $[0, \pi] \to \mathbf{R}$ dată de $g(t) = (f \circ \gamma)(t) - (f \circ \gamma)(t + \pi)$. Rezultă că g este continuă pe $[0, \pi]$. Deoarece $g(0) = f(1, 0) - f(-1, 0)$ și $g(\pi) = f(-1, 0) - f(1, 0) = -g(0)$ rezultă că $g(0) \cdot g(\pi) \leq 0$.

Dacă $g(0) = 0$ atunci punctele căutate sunt $(1, 0)$ și $(-1, 0)$ iar dacă $g(0) \cdot g(\pi) = -g^2(0) < 0$, atunci există $t_0 \in (0, \pi)$ astfel încât $g(t_0) = 0$ adică $f(\gamma(t_0)) = f(\gamma(\pi + t_0))$. Evident punctele $\gamma(t_0)$ și $\gamma(\pi + t_0)$ sunt diametral opuse în A.

Exercițiul 3.3.13. Stabiliți dacă următoarele funcții au limită în $x = 0$.

a) $f: (-1, 1)\setminus\{0\} \to \mathbf{R}^3$, $f(x) = \left(\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}, \dfrac{e^{3x} - 1}{2x}, \dfrac{1 - \cos x}{x\left(\sqrt{1+x} - 1\right)}\right)$

b) $f: \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}^3$, $f(x) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}}, \dfrac{\sin x}{x}, \sin\dfrac{1}{x}\right)$

Soluţie. a) Fie $f_1(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. În $x = 0$ suntem în cazul de nedeterminare $\dfrac{0}{0}$.

Deoarece

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$ pentru

orice $x \in (-1, 1)\setminus\{0\}$ deducem că $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 1$. Notând $f_2(x) = \dfrac{e^{3x}-1}{2x}$, $x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, şi încercând să calculăm $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$ constatăm că suntem din nou în cazul $\dfrac{0}{0}$.

Vom utiliza următoarea egalitate importantă: $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t} = 1$.

Deoarece $f_2(x) = \dfrac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\dfrac{3}{2}$ pentru orice $x \neq 0$ deducem imediat că $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = \dfrac{3}{2}$.

Fie acum $f_3(x) = \dfrac{1-\cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)}$, $x \in (-1, \infty)\setminus\{0\}$. În $x = 0$ suntem, din nou, în cazul $\dfrac{0}{0}$. Deoarece pentru orice $x \in (-1, \infty)\setminus\{0\}$ avem

$$f_3(x)=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x(\sqrt{1+x}-1)}=\frac{2\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\left(\sqrt{1+x}+1\right)$$

deducem că $\lim\limits_{x\to 0} f_3(x) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1$.

Deoarece $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ pentru orice $x\in (-1, \infty)\setminus\{0\}$ şi toate componentele f_1, f_2, f_3 au llimită în $x = 0$, deducem că f are limită în $x = 0$ şi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = (\lim\limits_{x\to 0} f_1(x), \lim\limits_{x\to 0} f_2(x), \lim\limits_{x\to 0} f_3(x)) = \left(1, \frac{3}{2}, 1\right)$.

b) Analog, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ unde $f_1(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f_2(x) = \frac{\sin x}{x}$, $f_3(x) = \sin\frac{1}{x}$ pentru orice $x\in \mathbf{R}\setminus\{0\}$. Evident $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 1$. Componenta f_3 nu are limită în $x = 0$ (este suficient să considerăm $a_n = \frac{1}{n\pi}$ şi $b_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, $n\in \mathbf{N}^*$ şi să observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ dar $\lim\limits_{n\to\infty} f_3(a_n) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$).

Deoarece una dintre componente nu are limită în $x = 0$, deducem că funcţia f nu are limită în $x = 0$.

Exercițiul 3.3.14. Demonstrați că funcția $f: \mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to \mathbf{R}^2$,

$f(x,y)=\left(\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2},\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$ nu are limită în $(0,0)$.

Soluție. Fie $f_1(x,y)=\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}$ și $f_2(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pentru $(x,y)\neq(0,0)$ componentele funcției vectoriale f. Deoarece pentru orice $(x,y)\neq(0,0)$ avem $|f_1(x,y)|\le\dfrac{x^2\,|\,y^3\,|}{x^2}=|y^3|$ dacă $x\neq 0$ și $f_1(0,y)=\dfrac{0}{y^2}$ dacă $y\neq 0$ iar $\lim\limits_{y\to 0}|\,y^3\,|=0$ rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y)=0$.

Deoarece $f_2(x,kx)=\dfrac{1-k^2}{1+k^2}$ pentru orice $x\neq 0$ rezultă că

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx)=\dfrac{1-k^2}{1+k^2}$ care depinde de k și funcția f_2 nu are limită în $(0,0)$.

Deducem de aici că funcția vectorială f nu are limită în $(0,0)$.

Exercițiul 3.3.15. Să se studieze continuitatea funcției $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$,

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{\sin 5x}{x},\dfrac{1-\cos x}{x^2},\dfrac{e^x-1}{x}\right), & x\neq 0\\ \left(5,\dfrac{1}{2},1\right), & x=0\end{cases}$$

Soluție. Fiecare componentă a funcției f este continuă pe $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, deci f este continuă pe $\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=5$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\left(5,\dfrac{1}{2},1\right)=f(0)$, deci f este continuă şi în $x=0$. Prin urmare f este continuă pe $\mathbf{R}$.

Exerciţiul 3.3.16. Să se determine $a, b, c\in\mathbf{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}{x^2+y^2},(1+|xy|)^{\frac{1}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}}},\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right) & ,(x,y)\neq(0,0)\\ (a,b,c) & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

să fie continuă pe $\mathbf{R}^2$.

Soluţie. Funcţia vectorială f este continuă pe $\mathbf{R}^2$ dacă şi numai dacă fiecare componentă a sa este continuă pe $\mathbf{R}^2$.

Pe $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ cele trei componente sunt continue fiind compuneri de funcţii continue. Pentru a studia continuitatea funcţiei vectoriale f în $(0,0)$ determinăm limita în $(0,0)$ a fiecărei componente.

Deoarece $f_1(x,y)=\dfrac{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}{x^2+y^2}=\dfrac{-x^2-y^2}{(x^2+y^2)(1+\sqrt{1+x^2+y^2})}$

pentru orice $(x,y)\neq(0,0)$ rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_1(x,y)=-\dfrac{1}{2}$.

$$f_2(x,y)=(1+|xy|)^{\frac{1}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}}}=\left[(1+|xy|)^{\frac{1}{|xy|}}\right]^{\frac{|xy|}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}}}$$

Dar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+|xy|)^{\frac{1}{|xy|}} = e$ şi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}} = 0.$

Prin urmare $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x, y) = e^0 = 1.$

Avem şi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_3(x, y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} =$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\sin^2\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\frac{x^2+y^2}{2} \cdot$$

$$\cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\frac{x^2+y^2}{2}}{\frac{x^2+y^2}{2}} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Prin urmare, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \left(-\frac{1}{2},1,0\right)$. Cum $f(0, 0) = (a, b, c)$ rezultă că f este continuă în $(0,0)$ dacă şi numai dacă $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 0$.

Exercițiul 3.3.17. Fie $I = [0, 2\pi)$, $A = \{(x, y), x^2 + y^2 = 1\}$; $f: I \to A$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Să se demonstreze că f este continuă şi bijectivă dar f^{-1} nu este continuă.

Soluție. Funcția f este continuă deoarece componentele ei $f_1(t) = \cos t$ şi $f_2(t) = \sin t$ sunt continue. Pentru orice $(x, y) \in A$ există şi este unic $t \in I$ astfel încât $x = \cos t$ şi $y = \sin t$, adică $f(t) = (x, y)$ deci f este bijectivă.

Fie $f^{-1}: A \to I$ funcția inversă. Deci $f^{-1}(x, y) = t$ dacă şi numai dacă $(x, y) = f(t)$. Demonstrăm că funcția f^{-1} nu este continuă în punctul $(1, 0)$. Evident, $f^{-1}(1, 0) = 0$.

Considerăm $x_n = cos\left(2\pi - \frac{1}{n}\right)$ şi $y_n = sin\left(2\pi - \frac{1}{n}\right)$ cu $n \in \mathbf{N}^*$. Atunci $((x_n, y_n))_n \in \mathbf{N}^*$ este un şir de puncte din A cu limita $(1, 0)$ şi $\lim_{n\to\infty} f^{-1}(x_n, y_n)$ $= \lim_{n\to\infty}\left(2\pi - \frac{1}{n}\right) = 2\pi \neq f^{-1}(1, 0)$. Rezultă că f^{-1} este discontinuă în $(1, 0)$.

3.4. Exerciţii propuse.

Exerciţiul 3.4.1. Studiaţi convergenţa următoarelor şiruri din $\mathbf{R}^3$:

a) $x_n = \left(\frac{2n}{3n+1}, \frac{n}{n+1}, \frac{1}{n^2}\right)$

b) $x_n = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \sqrt[n]{n}, \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}\right)$

c) $x_n = \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}, \frac{1+1/2+1/3+\ldots+1/n}{n}, \frac{1}{n}\sin n\right)$

d) $x_n = \left(\sin\frac{n\pi}{2}, \frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}\right)$

e) $x_n = \left(\frac{1+(-1)^n}{n}, (1+(-1)^n), \frac{1}{n}\right)$

R. a) convergent, $\lim_{n\to\infty} x_n = \left(\frac{2}{3}, 1, 0\right)$, b) convergent, $\lim_{n\to\infty} x_n = (e, 1, 0)$, c) convergent $\lim_{n\to\infty} x_n = \left(\frac{1}{e}, 0, 0\right)$, d) divergent, e) divergent.

Exercițiul 3.4.2. Să se demonstreze că:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = 0$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{(x-1)^2 y^3}{(x-1)^2+y^2} = 0$ d) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} y^2 \ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right) = 0$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 0$ f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy} = 0$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = 2$ h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2+y^2)^{xy} = 1$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$ j) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (1+xyz)^{\frac{1}{\sqrt{x+y+z}}} =$

1

Exercițiul 3.4.3. Să se arate că următoarele funcții nu au limită în punctele indicate:

a) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ în (0, 0) b) $f(x, y) = \dfrac{1}{x+y}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+y\right)$ în (0, 0)

c) $f(x, y) = \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x\cdot y}$ în (0, 0) d) $f(x, y) = \dfrac{x-y-1}{x+y-1}$ în (1, 0)

e) $f(x, y) = \dfrac{xy+x-y-1}{x^2+y^2-2x+2y+2}$ în (1, -1)

f) $f(x, y) = \dfrac{y^2+2x-a}{y^2-2x+a}$ în $\left(\dfrac{a}{2},0\right)$.

Exercițiul 3.4.4. Să se studieze dacă următoarele funcții au limită în origine:

a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

b) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

c) $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$

d) $f(x, y) = (2x + y)\dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

R. a) nu, b) nu, c) nu, d) da.

Exercițiul 3.4.5. Să se studieze continuitatea funcțiilor:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad\quad , (x, y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, (x, y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad\quad , (x, y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(x^3 + y^3)}{(x^2 + y^2)^2}, (x, y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad\quad , (x, y) = (0,0) \end{cases}$

d) $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{y^2}\right), y \neq 0 \\ 0 \qquad\quad , y = 0 \end{cases}$

e) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-y} e^{\frac{1}{x-y}}, x \neq y \\ 0 \qquad\qquad , x = y \end{cases}$

f) $f(x, y) = \begin{cases} (x+y)\cos\dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad , x = 0 \end{cases}$

g) $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2}, x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 \qquad\qquad , x^2+y^2 > 1 \end{cases}$

h) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)}, 0 < x^2+y^2 < 1 \\ 0 \qquad\qquad , x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

i) $f(x, y) = \begin{cases} y-x^2 \quad , x^2 < y \\ 0 \qquad , x = y = 0 \\ \dfrac{y^2-x^2y}{x^2}, 0 < y \leq x^2 \end{cases}$

j) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{tg2(y-x^2)}{y-x^2}, y-x^2 < 0 \\ 2 \qquad\qquad , x^2 = y \\ 2-\dfrac{2x^3+y^3}{x^2+y^2}, y-x^2 > 0 \end{cases}$

k) $f(x, y, z) = \begin{cases} (1-x-2z)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}, x^2+y^2+z^2 \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad , (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

l) $f(x, y, z) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}, x^2+y^2+z^2 \neq 0 \\ 3 \qquad\quad , x^2+y^2+z^2 = 0 \end{cases}$

R. a) continuă pe $\mathbf{R}^2$; b) continuă pe $\mathbf{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$; c) continuă pe $\mathbf{R}^2$; d) continuă pe $\mathbf{R}^2$; e) continuă pe $\mathbf{R}^2$; f) continuă pe $\mathbf{R}^2\setminus\{(0, b), b \neq 0\}$; g) continuă pe $\mathbf{R}^2$; h) continuă; i) continuă pe $\mathbf{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$; j) continuă pe $\mathbf{R}^2\setminus\{(a, a^2), a \neq 0\}$; k) continuă pe $\mathbf{R}^3\setminus\{(0, 0, 0)\}$;
l) continuă pe $\mathbf{R}^3\setminus\{(0, 0, 0)\}$;

Exercițiul 3.4.6. Să se studieze continuitatea uniformă a funcțiilor următoare pe mulțimile indicate:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + x$, $x \in [0, \infty)$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + x$, $x \in (-1, \infty)$

c) $f(x) = \sin x^2$, $x \in \mathbf{R}$

R. a) da, b) nu, c) nu

Exercițiul 3.4.7. Să se studieze continuitatea uniformă a funcțiilor următoare, pe mulțimile indicate:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), A = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\} \\ 1, \qquad\qquad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$, $A = \mathbf{R}^2$.

R. a) da, b) nu.

Exercițiul 3.4.8. Să se arate că funcția $f(x) = x^5 - 2x - 1$ se anulează cel puțin o dată între $x = 1$ și $x = 2$.

Exercițiul 3.4.9. Fie $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^2 + y^2 < 4\}$. Demonstrați că ecuația $x^2 + 2y^2 = 3$ are cel puțin o soluție în A.

Indicație. Mulțimea A este o submulțime deschisă și conexă a lui $\mathbf{R}^2$, iar funcția $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3$ este continuă pe $\mathbf{R}^2$.

Deoarece $f(0, 0) = -3 < 0$ și $f(1, \sqrt{2}) = 2 > 0$ rezultă că există $(x_0, y_0) \in A$ astfel încât $f(x_0, y_0) = 0$ de unde afirmația rezultă imediat.

Exercițiul 3.4.10. Să se studieze dacă următoarele funcții vectoriale au limită în origine:

a) $f(x, y) = \left(\dfrac{x^2 y^3}{x^2 + y^4}, \dfrac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \right)$ b) $f(x, y, z) = \left(e^{\frac{1}{x+y+z}}, \dfrac{x + z}{x + y + z} \right)$

R. a) da, b) nu

Exercițiul 3.4.11. Să se studieze continuitatea funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$,

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}, \dfrac{1-\cos x}{x^2} \right), & x \neq 0 \\ \left(1, \dfrac{1}{2} \right), & x = 0 \end{cases}$$

R. continuă pe $\mathbf{R}$.

Exercițiul 3.4.12. Să se studieze continuitatea funcției $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}, \dfrac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \right), & (x, y) \neq (0,0) \\ (0,0), & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

R. continuă pe $\mathbf{R}^2$.

4. FUNCŢII DIFERENŢIABILE. EXTREME LOCALE.

4.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale.

4.1.1. Diferenţiabilitatea funcţiilor reale de o variabilă reală.

Multe probleme concrete conduc la evaluarea aproximativă a creşterii unei anumite mărimi în raport cu creşterea alteia. Pentru simplitatea ei este preferată aproximarea liniară.

Fiind dată o funcţie $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ şi un punct fixat $x_0 \in (a, b)$ se caută o funcţie liniară L_{x_0} astfel încât creşterea funcţiei f în punctul x_0, relativă la creşterea h a argumentului, să poată fi aproximată cu $L_{x_0}(h)$, adică:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx L_{x_0}(h)$$

pentru h suficient de mic. Pentru ca o asemenea formulă aproximativă să poată fi acceptată este necesar ca:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{h} = 0$$

ceea ce asigură că eroarea în formula de aproximare poate fi făcută oricât de mică pentru variaţii din ce în ce mai mici ale argumentului.

Apar în mod natural o serie de probleme, cum ar fi: existenţa şi unicitatea aplicaţiei liniare L_{x_0}, precum şi caracterizarea funcţiilor f pentru care pot fi considerate asemenea aproximări liniare.

Din liceu se ştie că pentru o funcţie $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ derivabilă în punctul $x_0 \in (a, b)$, poate fi considerată formula de aproximare:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot h$$

pentru h suficient de mic.

Aceste consideraţii conduc, în mod natural, la următoarea definiţie:

Definiţia 4.1.1.1. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime deschisă, $f : A \to \mathbf{R}$ o funcţie arbitrară, $x_0 \in A$ un punct fixat. Funcţia f se numeşte *diferenţiabilă în punctul* x_0 dacă există o aplicaţie liniară $L_{x_0} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încât:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{h} = 0$$

Observaţia 4.1.1.1. a) Orice funcţie liniară L: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este de forma $L(x) = c \cdot x$, $x \in \mathbf{R}$, unde $c = L(1)$; reciproc, oricare ar fi $c \in \mathbf{R}$, fixat, egalitatea $L(x) = c \cdot x$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$, defineşte o funcţie liniară $L: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Prin urmare, orice aplicaţie liniară de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{R}$ este bine determinată de o constantă reală. Deducem astfel că funcţia f este diferenţiabilă în punctul x_0 dacă şi numai dacă există $c_{x_0} \in \mathbf{R}$, încât:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - c_{x_0} \cdot h}{h} = 0$$

b) Egalitatea $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{h} = 0$ poate fi scrisă echivalent:

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)|}{|h|} = 0$$

Ultima egalitate prezintă avantajul că poate fi uşor transcrisă pentru funcţii de la $\mathbf{R}^p$ la $\mathbf{R}^m$ înlocuind modulul din $\mathbf{R}$ cu norma din $\mathbf{R}^p$, respectiv din $\mathbf{R}^m$.

Teorema următoare stabileşte faptul că o funcţie reală de o variabilă reală este diferenţiabilă într-un punct fixat x_0 dacă şi numai dacă ea este derivabilă în acest punct.

Teorema 4.1.1.1. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime deschisă, $f : A \to \mathbf{R}$ o funcţie arbitrară, $x_0 \in A$ un punct fixat. Dacă f este diferenţiabilă în x_0, atunci f este derivabilă în x_0 şi $f'(x_0) = L_{x_0}(1)$. Dacă f este derivabilă în x_0, atunci f este diferenţiabilă în x_0 şi $L_{x_0} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $L_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h$.

Observaţia 4.1.1.2. Din această teoremă se deduce imediat că aplicaţia liniară L_{x_0} din definiţia 4.1.1.1. este unic determinată de f şi x_0.

Definiţia 4.1.1.2. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime deschisă, $f : A \to \mathbf{R}$ o funcţie arbitrară. Dacă funcţia f este diferenţiabilă în punctul fixat $x_0 \in A$, aplicaţia liniară L_{x_0} se numeşte *diferenţiala funcţiei f în punctul x_0* şi se notează df_{x_0}. Funcţia f se numeşte *diferenţiabilă pe mulţimea A* dacă este diferenţiabilă în fiecare punct $x \in A$. În acest caz, notând prin $\mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ mulţimea tuturor aplicaţiilor liniare de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{R}$, funcţia $df : A \to \mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ definită prin $(df)(x) = df_x$ se numeşte *diferenţiala funcţiei f pe mulţimea A*.

Observaţia 4.1.1.3. a) Cunoaşterea funcţiei $df : A \to \mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ revine la cunoaşterea funcţiei $df_x \in \mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ pentru orice $x \in A$. Din teorema 4.1.1.1. deducem că pentru orice $x \in A$ şi orice $h \in \mathbf{R}$ avem:

$$(df)(x)(h) = df_x(h) = f'(x) \cdot h$$

b) Funcţia identitate pe A, $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$ este diferenţiabilă pe A şi diferenţiala sa, *notată cu dx*, este egală, în fiecare punct $x \in A$, cu funcţia identitate pe $\mathbf{R}$. Prin urmare, $dx : A \to \mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ şi $(dx)(x) = 1_{\mathbf{R}}$ pentru orice $x \in A$, adică, oricare ar fi $x \in A$ şi oricare ar fi $h \in \mathbf{R}$, $(dx)(x)(h) = h$.

c) Cu ajutorul diferenţialei funcţiei identitate pe A putem exprima diferenţiala funcţiei f diferenţiabile pe A, astfel:

$$df = f' \cdot dx$$

Este evident că studiul funcţiilor reale de o variabilă reală, diferenţiabile se reduce la studiul funcţiilor derivabile, cunoscut din liceu.

4.1.2. Cazul funcţiilor vectoriale de o variabilă reală.

Ţinând seama de observaţia 4.1.1.1. b), definiţia 4.1.1.1. se poate exprima astfel:

Definiţia 4.1.2.1. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime deschisă, $f : A \to \mathbf{R}^m$ o funcţie vectorială de o variabilă reală arbitrară, $x_0 \in A$ un punct fixat. Funcţia f se numeşte *diferenţiabilă în punctul x_0* dacă există o aplicaţie liniară $L_{x_0} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ astfel incât:

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\| f(x_0+h)-f(x_0)-L_{x_0}(h) \|}{\| h \|} = 0$$

(la numărător se consideră norma euclidiană din $\mathbf{R}^m$, $m \geq 2$)

Ţinând seama de faptul că, în $\mathbf{R}^m$, operaţiile algebrice şi trecerea la limită se fac pe componente, rezultă imediat:

Teorema 4.1.2.1. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime deschisă, $f : A \to \mathbf{R}^m$ o funcţie vectorială de o variabilă reală, de componente $f_k : A \to \mathbf{R}$ $k = 1, 2, \ldots, m$, $x_0 \in A$ un punct fixat. Funcţia f este diferenţiabilă în punctul x_0 dacă şi numai dacă toate componentele sale sunt diferenţiabile în x_0. Ţinând seama de teorema 4.1.1.1. şi de faptul că $L_{x_0}(h) = (c_1 h, c_2 h, \ldots, c_m h)$, unde $c_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, m$ se obţine $L_{x_0}(h) = (f'_1(x_0)\cdot h, f'_2(x_0)\cdot h, \ldots, f'_m(x_0)\cdot h) = (f'_1(x_0), f'_2(x_0), \ldots, f'_m(x_0))\cdot h$.

Prin urmare, şi în acest caz, aplicaţia liniară L_{x_0} din definiţie este bine determinată de funcţia f şi punctul x_0, mai exact de vectorul $(f'_1(x_0), f'_2(x_0), \ldots, f'_m(x_0))$ unic determinat de f şi x_0.

Vom nota L_{x_0} cu df_{x_0} şi o vom numi *diferenţiala funcţiei f în punctul* x_0; vom nota:

$$(f'_1(x_0), f'_2(x_0), \ldots, f'_m(x_0)) = f'(x_0)$$

şi vom numi acest vector *derivata funcţiei vectoriale f în punctul* x_0. Atunci, evident $df_{x_0}(h) = f'(x_0)\cdot h$ pentru orice $h \in \mathbf{R}$.

Să reţinem deci că derivarea şi diferenţierea unei funcţii vectoriale de o variabilă reală se realizează ca şi trecerea la limită sau studiul continuităţii, pe componente.

4.1.3. Cazul funcţiilor reale de variabilă vectorială (de mai multe variabile reale)

Considerăm $\mathbf{R}^p$ înzestrat cu norma euclidiană, $p \geq 2$, $A \subseteq \mathbf{R}^p$ o submulţime deschisă.

Ţinând seama de observaţia 4.1.1.1. b), definiţia 4.1.1.1. se extinde astfel:

Definiția 4.1.3.1. Funcția $f : A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ se numește *diferențiabilă în punctul* $x_0 \in A$ dacă există o aplicație liniară $L_{x_0} : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ astfel încât:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)|}{\|h\|} = 0$$

(la numitor se consideră norma euclidiană din $\mathbf{R}^p$, $p \geq 2$)

Observația 4.1.3.1. Deoarece aplicația L_{x_0} este liniară, pentru orice $h \in \mathbf{R}^p$, $h = (h_1, h_2, \ldots, h_p)$ avem: $L_{x_0}(h) = c_1^0 h_1 + c_2^0 h_2 + \ldots + c_p^0 h_p$, unde $c_i^0 \in \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, p$.

În ideea de a stabili legătura între numerele c_1^0, c_2^0, ..., c_p^0 și funcția f, se poate arăta că, dacă f este diferențiabilă în x_0, deci aplicația L_{x_0} există,

$$c_i^0 = \lim_{h_i \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + h_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_p^0) - f(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_p^0)}{h_i}$$

$$i = 1, 2, \ldots, p$$

Prin urmare, și în acest caz, aplicația liniară L_{x_0} din definiție este unic determinată de funcția f și punctul x_0.

Vom nota L_{x_0} cu df_{x_0} și o vom numi *diferențiala funcției* f *în punctul* x_0.

Limita de mai sus se numește *derivata parțială a funcției* f *în raport cu variabila* x_i *în punctul* x_0 și se notează $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$. Deci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) =$

$$\lim_{h_i \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + h_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_p^0) - f(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_p^0)}{h_i}$$

$$i = 1, 2, \ldots, p$$

Rezultă astfel:

Teorema 4.1.3.1. Dacă funcția f este diferențiabilă în punctul x_0 atunci f are derivate parțiale în acest punct în raport cu toate variabilele și:

$$df_{x_0}(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\cdot h_2 + \ldots + + \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0)\cdot h_p$$

pentru orice $h = (h_1, h_2, \ldots, h_p) \in \mathbf{R}^p$.

Observaţia 4.1.3.2. a) Rolul derivatei de la funcţii de o variabilă îl joacă vectorul $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0)\right)$ care se numeşte *gradientul funcţiei f în punctul* x_0 şi se notează $(grad\, f)(x_0)$.

Evident, $df_{x_0}(h) = (grad\, f)(x_0)\cdot h$, pentru orice $h \in \mathbf{R}^p$.

b) Dacă f are derivate parţiale în x_0, în raport cu toate variabilele nu rezultă, în general, că f este diferenţiabilă în x_0. De exemplu, dacă $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq 0 \text{ si } y \neq 0 \\ 0, x = 0 \text{ sau } y = 0 \end{cases}$$ atunci există $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$,

dar f nu este diferenţiabilă în $(0, 0)$. Dacă f ar fi diferenţiabilă în $(0, 0)$ ţinând seama de teorema precedentă, $L_{(0,0)}(h) = 0$ pentru orice $h \in \mathbf{R}^p$.

Raportul $\frac{|f(h_1, h_2) - f(0,0) - L_{(0,0)}(h_1, h_2)|}{\|h\|} = \frac{1}{\|h\|}$ nu are însă limita zero când $\|h\| \to 0$, deci f nu este diferenţiabilă în $(0, 0)$.

c) Fie $i \in \{1,2,\ldots,p\}$ arbitrar, fixat. Fie $\Pi_i : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $\Pi_i(x_1, x_2, \ldots, x_p) = x_i$ aplicaţia de proiecţie. Oricare ar fi $x_0 \in \mathbf{R}^p$, Π_i este diferenţiabilă în x_0 şi $(d\,\Pi_i)_{x0} = \Pi_i$. De obicei se notează $d\,\Pi_i$ cu dx_i. Astfel, $(dx_i)_{x0}(h_1, h_2, \ldots, h_p) = \Pi_i(h_1, h_2, \ldots, h_p) = h_i$. Cu ajutorul diferenţialelor aplicaţiilor de proiecţe, diferenţiala unei funcţii diferenţiabile arbitrare se exprimă astfel:

$$df_{x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\cdot (dx_1)_{x_0} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\cdot (dx_2)_{x_0} + \ldots +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0)\cdot (dx_p)_{x_0}$$

aceasta fiind o egalitate de aplicaţii din $\mathcal{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R})$.

Dacă f este diferenţiabilă în orice punct din A, atunci, evident, obţinem:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_p} \cdot dx_p$$

aceasta fiind o egalitate de aplicații definite pe A cu valori în $\mathcal{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R})$, unde $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ este funcția care asociază fiecărui punct din A numărul real care este derivata parțială a funcției f în raport cu variabila x_i în acest punct.

Definiția 4.1.3.2. Funcția $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ se numește *derivabilă parțial pe mulțimea A* dacă are derivate parțiale în raport cu toate variabilele sale în orice punct din A. În acest caz se pot defini p funcții $\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \to \mathbf{R}$, $x \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, p$ numite *derivatele parțiale* ale lui f pe mulțimea A. Funcția f este de clasă C^1 pe A și se notează $f \in C^1(A)$ dacă f este derivabilă parțial pe A și funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, p$ sunt continue pe A.

Teorema 4.1.3.2. Dacă funcția $f: A \subseteq \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ este derivabilă parțial pe o vecinătate deschisă V a punctului $x_0 \in A$, iar funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x_i} : V \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, p$ sunt continue în x_0, atunci funcția f este diferențiabilă în x_0. Dacă $f \in C^1(A)$ atunci f este diferențiabilă pe A.

Observația 4.1.3.3. Continuitatea derivatelor parțiale în x_0 este o condiție suficientă pentru diferențiabilitatea funcției f în acest punct, dar nu neapărat necesară. De exemplu, funcția $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

este diferențiabilă în origine fără ca derivatele sale parțiale să fie continue în acest punct (vezi exercițiul 4.3.4.).

Definiția 4.1.3.3. Fie $A \subseteq \mathbf{R}^p$ o submulțime deschisă, $f: A \to \mathbf{R}$, $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) \in A$ și fie $v = (v_1, v_2, \ldots, v_p) \in \mathbf{R}^p$ un versor dat ($\|v\| = 1$). Funcția f se numește *derivabilă în punctul* x_0 *după versorul* v dacă există în $\mathbf{R}$ $\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$. Notăm această limită cu $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ și o numim *derivata funcției* f *după versorul* v *în punctul* x_0.

Observația 4.1.3.4. a) Notând $x = x_0 + tv$ rezultă că vectorul $x - x_0$ este coliniar cu v, iar t este abscisa punctului x pe dreapta determinată de x_0 și v, orientată cu ajutorul lui v. Cu această notație, putem scrie:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x - x_0 = tv}} \frac{f(x) - f(x_0)}{t}$$

ceea ce justifică terminologia utilizată.

b) Notând cu $v^* = -v$ (versorul opus) se observă imediat că dacă există $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ atunci există $\frac{\partial f}{\partial v^*}(x_0) = -\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$; acest fapt justifică de ce derivata $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ este asociată versorului și nu direcției (care admite doi versori)

c) Dacă $\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ este baza canonică a lui $\mathbf{R}^p$, atunci derivata funcției f după versorul e_k este tocmai derivata parțială în raport cu variabila x_k, adică

$$\frac{\partial f}{\partial e_k}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0),\ k = 1, 2, \ldots, p$$

Prin urmare, derivatele parțiale ale unei funcții într-un punct sunt cazuri particulare de derivate după versori în acel punct.

Teorema 4.1.3.3. Dacă funcția f este diferențiabilă în x_0, atunci există $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ pentru orice versor $v \in \mathbf{R}^p$ și $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df_{x_0}(v)$.

Ținând seama de teorema 4.1.3.1. deducem că:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = (grad\, f)(x_0) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \cdot v_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0) \cdot v_p$$

Deci, dacă f este diferenţiabilă în x_0, atunci ea are derivată după orice versor în x_0 şi aceasta se poate exprima cu ajutorul derivatelor parţiale în acest punct.

Definiţia 4.1.3.4. Fie $A \subseteq \mathbf{R}^p$ o submulţime deschisă, $f: A \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă parţial în raport cu variabila x_k pe o vecinătate V a punctului fixat $x_0 \in A$. Dacă funcţia $\frac{\partial f}{\partial x_k}: V \to \mathbf{R}$ este derivabilă parţial în raport cu variabila x_j, $j \neq k$ în punctul x_0, atunci f se numeşte *de două ori derivabilă parţial* în punctul x_0, în raport cu variabilele x_j şi x_k, iar $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(x_0)$ se notează $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0)$ şi se numeşte *derivata parţială mixtă de ordinul doi a funcţiei f în punctul x_0 în raport cu variabilele x_j şi x_k*. Dacă $j = k$, în condiţiile de mai sus, funcţia se numeşte de două ori derivabilă parţial în punctul x_0, în raport cu variabila x_k, iar $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(x_0)$ se notează $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x_0)$ şi se numeşte *derivata parţială de ordinul doi a funcţiei f în punctul x_0 în raport cu variabila x_k*.

Dacă funcţia f este de două ori derivabilă parţial în raport cu variabilele x_j şi x_k în fiecare punct din A, spunem că f este de două ori derivabilă parţial în raport cu variabilele x_j şi x_k pe A, iar aplicaţia $x \to \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x)$ se numeşte *derivata parţială de ordinul doi a funcţiei f în raport cu variabilele x_j şi x_k*. Evident, j şi k pot lua oricare din valorile *1, 2, ..., p* deci, pentru o funcţie de p variabile, se pot defini p^2 derivate parţiale de ordinul doi, dintre care $p^2 - p$ sunt mixte.

Funcţia f se numeşte *de clasă* C^2 pe mulţimea A, dacă toate derivatele parţiale de ordinul doi există şi sunt continue pe A.

Observaţia 4.1.3.5. Pentru funcţii de două variabile există patru derivate parţiale de ordinul doi: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Pentru unele funcţii derivatele mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sunt egale. În schimb, pentru funcţia $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad\qquad , (x,y) = (0,0) \end{cases}$, avem:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$. (vezi exerciţiul 4.3.10.)

Deci, în acest caz, derivatele parţiale mixte în (0, 0) nu sunt egale. Teorema următoare dă condiţii suficiente pentru egalitatea derivatelor parţiale mixte.

Teorema 4.1.3.4. (H.A. Schwarz) Fie $A \subseteq \mathbf{R}^p$ o mulţime deschisă, $f: A \to \mathbf{R}$ o funcţie de clasă C^2 pe A. Atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$, $j, k = 1, 2, \ldots, p$.

Observaţia 4.1.3.6. Continuitatea derivatelor mixte este o condiţie suficientă, dar nu neapărat necesară, pentru egalitatea acestora. De exemplu, pentru funcţia $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right), y \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad , y = 0 \end{cases}$ avem $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$, dar funcţia $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nu este continuă în origine. (vezi exerciţiul 4.3.11.)

Definiția 4.1.3.5. Matricea $H_f(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0) \right)$, $j, k = 1, 2, \ldots, p$ se numește *hessiana funcției f în punctul* x_0.

În cazul în care f este de clasă C^2 matricea $H_f(x_0)$ este o matrice simetrică. În acest caz, forma pătratică determinată de această matrice, adică aplicația $\varphi_{x_0} : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $\varphi_{x_0}(h) = \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j$ joacă un rol foarte important în determinarea punctelor de extrem local pentru o funcție reală de mai multe variabile reale.

Definiție 4.1.3.6. Fie $A \subseteq \mathbf{R}^p$ o mulțime deschisă, $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție arbitrară. Un punct $x_0 \in A$ se numește *punct de extrem local al funcției f* dacă există o vecinătate V a punctului x_0 în care diferența $f(x) - f(x_0)$ are semn constant. Mai precis, punctul x_0 se numește *punct de maxim* (respectiv de *minim*) *local* al lui f dacă pentru orice $x \in V$ avem $f(x) - f(x_0) \leq 0$ (respectiv $f(x) - f(x_0) \geq 0$). Un punct $x_0 \in A$ se numește *punct critic* (sau *staționar*) pentru funcția f, dacă f are derivate parțiale de ordinul întâi nule în x_0, adică $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Teorema următoare stabilește condiții necesare de extrem.

Teorema 4.1.3.5. (Fermat) Fie $A \subseteq \mathbf{R}^p$ o mulțime deschisă. Dacă funcția $f : A \to \mathbf{R}$ are derivate parțiale de ordinul întâi în punctul $x_0 \in A$ și x_0 este punct de extrem local al lui f, atunci x_0 este punct critic (staționar) pentru f.

Observația 4.1.3.7. Dacă $f : A \to \mathbf{R}$ este o funcție derivabilă parțial în raport cu toate variabilele pe mulțimea deschisă $A \subseteq \mathbf{R}^p$ atunci punctele de extrem local ale funcției f se află printre soluțiile situate în A ale sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \; i = 1,2,\ldots,p$$

Nu orice soluție a acestui sistem este un punct de extrem. De exemplu, pentru funcția $f(x, y) = x^3 - y^3$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, singurul punct critic este $(0, 0)$, dar $f(x, y) - f(0, 0)$ nu păstrează un semn constant în nici o

vecinătate a originii. Prin urmare, (0, 0) este punct critic, dar nu este punct de extrem pentru f.

În cele ce urmează, în cazul în care f este de clasă C^2 vom da condiții suficiente prin utilizarea cărora să se poată decide care din punctele critice ale unei funcții sunt puncte de extrem.

Teorema 4.1.3.6. Fie $A \subseteq \mathbf{R}^p$ o mulțime deschisă și convexă, $f: A \to \mathbf{R}$ o funcție de clasă C^2 pe A. Fie $x_0 \in A$ un punct critic al funcției f și φ_{x_0} forma pătratică determinată de matricea hessiană $H_f(x_0)$. Dacă forma pătratică φ_{x_0} este pozitiv definită (negativ definită) atunci x_0 este punct de minim (respectiv de maxim) local pentru f.

În demonstrația acestei teoreme este foarte utilă formula lui Taylor cu restul de ordinul doi:

Dacă $f: A \to \mathbf{R}$ este o funcție de clasă C^2 pe mulțimea deschisă și convexă A, iar $x_0 \in A$ este un punct fixat, atunci, pentru orice $x \in A$ există ξ pe segmentul $[x_0, x]$ astfel încât:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_i^0) + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{p}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

Observația 4.1.3.8. a) Dacă f este de clasă C^2 pe A, matricea hessiană în orice punct este o matrice simetrică, deci toate valorile ei proprii sunt reale. Dacă $H_f(x_0)$ are toate valorile proprii strict pozitive (respectiv strict negative) atunci forma pătratică φ_{x_0} este pozitiv definită (respectiv negativ definită) și deci x_0 este punct de minim (respectiv maxim) local pentru f.

b) Condițiile lui Sylvester din teoria formelor pătratice aplicate formei φ_{x_0} de mai sus arată că x_0 este punct de minim dacă minorii principali $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$ ai matricii hessiene sunt strict pozitivi; x_0 este punct de maxim dacă $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots, (-1)^p \cdot \Delta_p > 0$.

c) Dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = 0$ pentru orice $i, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ atunci se studiază semnul creșterii $f(x) - f(x_0)$ direct sau cu ajutorul formulei lui Taylor scrisă corespunzător (dacă f este de clasă C^n, $n \geq 3$).

4.1.4. Cazul funcţiilor vectoriale de variabilă vectorială

Ţinând seama de observaţia 4.1.1.1. b), definiţia 4.1.1.1. se poate extinde astfel:

Definiţia 4.1.4.1. Fie $A \subseteq \mathbf{R}^p$ o mulţime deschisă, $p \geq 2, f: A \to \mathbf{R}^m$, $m \geq 2$ o funcţie vectorială de variabilă vectorială arbitrară, $x_0 \in A$ un punct fixat. Funcţia f se numeşte *diferenţiabilă în punctul* x_0 dacă există o aplicaţie liniară $L_{x_0} : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^m$ astfel încât:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\| f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h) \|}{\| h \|} = 0$$

(la numărător se consideră norma euclidiană din $\mathbf{R}^m$, iar la numitor, norma euclidiană din $\mathbf{R}^p$)

Ţinând seama de faptul că în $\mathbf{R}^m$ operaţiile algebrice şi trecerea la limită se face pe componente, rezultă ca şi în cazul 4.1.2. :

Teorema 4.1.4.1. Funcţia f este diferenţiabilă în punctul x_0 dacă şi numai dacă toate componentele sale sunt diferenţiabile în x_0.

În acest caz L_{x_0} are drept componente diferenţialele df_{1x_0}, df_{2x_0}, ..., df_{mx_0} ale componentelor lui f, care sunt aplicaţii liniare de la $\mathbf{R}^p$ la $\mathbf{R}$, exprimate cu ajutorul derivatelor parţiale ca în teorema 4.1.3.1. Prin urmare, şi în acest caz, aplicaţia liniară L_{x_0} din definiţia 4.1.4.1. este bine determinată de funcţia f şi punctul x_0, mai precis de matricea:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(x_0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_p}(x_0) \end{pmatrix}$$

numită matrice Jacobi (sau matrice jacobiană) a funcției f în punctul x_0, notată $J_f(x_0)$.

Vom nota L_{x_0} cu df_{x_0} și o vom numi *diferențiala funcției f în punctul* x_0. Atunci evident, $df_{x_0}(h) = J_f(x_0) \cdot h$, pentru orice $h \in \mathbf{R}^p$.

Dacă $m = p$ matricea Jacobi este o matrice pătrată, iar determinantul ei poartă numele de *jacobian* sau *determinant funcțional* al aplicației f în punctul x_0 și se notează

$$det\, J_f(x_0) = \frac{D(f_1, f_2, ..., f_p)}{D(x_1, x_2, ..., x_p)}(x_0)$$

Referitor la funcțiile compuse se poate demonstra:

Teorema 4.1.4.2. Fie $A \subseteq \mathbf{R}^p$, $B \subseteq \mathbf{R}^m$ mulțimi deschise, $f: A \to B$ o funcție diferențiabilă în punctul $x_0 \in A$, $g: B \to \mathbf{R}^m$ o funcție diferențiabilă în punctul $f(x_0) \in B$. Atunci funcția compusă $g \circ f: A \to \mathbf{R}^m$ este diferențiabilă în punctul x_0 și :

$$J_{g \circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0)$$

Observația 4.1.4.1. a) Din această egalitate rezultă diverse reguli de derivare parțială a funcțiilor compuse. De exemplu, dacă $p = n = 2$, $m = 1$, funcția f este de variabile x și y, iar g este de variabile u, v , ambele diferențiabile, obținem:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(f_1(x,y), f_2(x,y)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) +$$
$$+ \frac{\partial g}{\partial v}(f_1(x,y), f_2(x,y)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$$
$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(f_1(x,y), f_2(x,y)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) +$$
$$+ \frac{\partial g}{\partial v}(f_1(x,y), f_2(x,y)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)$$

b) Dacă $p = n = m$ se obține o relație importantă între determinanții funcționali și anume:

$$det[J_{g\circ f}(x_0)] = det[J_g(f(x_0))] \cdot det[J_f(x_0)]$$

4.2. Tipuri de probleme şi metode de rezolvare.

Exerciţiul 4.2.1. Să se calculeze derivatele parţiale ale funcţiei f în x_0.

- Pentru a calcula derivata parţială în raport cu x_i, se consideră constante toate celelalte variabile şi se derivează f ca şi cum x_i ar fi singura variabilă. Se folosesc regulile de derivare cunoscute.
- Se foloseşte definiţia.

Exerciţiul 4.2.2. Să se demonstreze că funcţia $f(x) = \ldots$ este diferenţiabilă pe A şi să se scrie diferenţiala sa.

- Dacă $f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se arată că f este derivabilă pe A şi $df: A \to \mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ este dată de $df_x(h) = f'(x) \cdot h$
- Dacă $f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ se arată că toate componentele lui f sunt derivabile pe A. În acest caz $df: A \to \mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^m)$ este dată de $df_x(h) = (f_1'(x), f_2'(x), \ldots, f_m'(x)) \cdot h$
- Dacă $f : A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ se calculează derivatele parţiale în fiecare punct din A:
  - Dacă ele sunt toate funcţii continue pe A, deducem că f este diferenţiabilă pe A
  - Dacă există măcar o derivată parţială discontinuă în $x_0 \in A$, atunci diferenţiabilitatea se studiază astfel:
  - Se consideră funcţia liniară $L_{x_0}(h) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \cdot h_2 + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(x_0) \cdot h_p$ unde $h = (h_1, h_2, \ldots, h_p)$.
  - Se determină raportul $R(h) = \dfrac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)|}{\|h\|}$ pentru orice $h \neq \theta_{R^p}$

- Se studiază existența limitei lui $R(h)$ în θ_{R^p}. Dacă $R(h)$ nu are limită în θ_{R^p}, sau dacă limita este nenulă, rezultă că f nu e diferențiabilă în x_0, iar dacă limita este 0 rezultă că f este diferențiabilă în x_0 și $df_{x_0} = L_{x_0}$. Dacă f este diferențiabilă pe A, atunci: $df_{x_0}(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\cdot h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0)\cdot h_p$ unde $h = (h_1, h_2, \ldots, h_p)$.

- Dacă $f: A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^m$ se demonstrează că toate componentele lui f sunt diferențiabile pe A. În acest caz $df_x(h) = J_f(x) \cdot h$

Exercițiul 4.2.3. Să se arate că funcția $f(x) = \ldots$ **nu este** diferențiabilă în $x_0 \in A$.

- Dacă f nu este continuă în x_0 rezultă **că nu este diferențiabilă** în x_0 sau, dacă f e continuă în x_0, se poate **proceda astfel:**
- Dacă $f: A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se arată că f nu este **derivabilă** în x_0.
- Dacă $f: A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ se arată că cel **puțin una** din componentele lui f nu este derivabilă în x_0.
- Dacă $f: A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ se arată că f **nu este** derivabilă parțial în raport cu una din variabile în x_0. **Dacă există** toate derivatele parțiale în x_0, se consideră funcția $L_{x_0}(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\cdot h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0)\cdot h_p$ și **se arată că** raportul $R(h) = \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)|}{\|h\|}$ **nu** are limită când $\|h\| \to 0$ sau, dacă limita există, aceasta **este diferită de** 0.
- Dacă $f: A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^m$ se arată că **una din componentele** lui f nu este diferențiabilă în x_0.

Exercițiul 4.2.4. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției $f: A \subset \mathbf{R}^p, f(x_1, \ldots, x_p) = \ldots$

- Se calculează derivatele parțiale de ordinul întâi și apoi derivatele parțiale ale acestora, folosind regulile de derivare uzuale sau folosind definiția.

Exercițiul 4.2.5. Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f: D \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}, f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \ldots$

- Se determină $D_1 \subset D$ pe care f este de clasă C^2
- Se calculează $\frac{\partial f}{\partial x_j}: D_1 \to \mathbf{R}, j = 1, 2, \ldots, p$
- Se rezolvă sistemul $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, j = 1, 2, \ldots, p$ obținându-se coordonatele punctelor staționare
- Se calculează $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}: D_1 \to \mathbf{R}, j = 1, 2, \ldots, p$
- Se scrie matricea hessiană a funcției f în fiecare punct staționar
- Cu ajutorul valorilor proprii sau a minorilor principali decidem dacă un asemenea punct este sau nu punct de extrem local pentru f, folosind teorema 4.1.3.6.
- Pentru punctele care se află în $D \setminus D_1$ se studiază direct semnul creșterii $f(x) - f(x_0)$ și se decide dacă punctul este de extrem local folosind definiția.

4.3. Exerciții rezolvate.

Exercițiul 4.3.1. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, x < 0 \\ x^2, \quad x \geq 0 \end{cases}$ este diferențiabilă pe $\mathbf{R}$ și să se determine diferențiala sa.

Soluție. Funcția f este evident, derivabilă în orice $x \neq 0, f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$ dacă $x < 0$ și $f'(x) = 2x$ dacă $x > 0$. Deoarece f este continuă în

$x = 0$ aplicând o consecință a teoremei lui Lagrange, rezultă că $f'_s(0) = \lim_{x \uparrow 0} f'(x) = 0$ și $f'_d(0) = \lim_{x \downarrow 0} f'(x) = 0$, deci f este derivabilă în $x = 0$ și $f'(0) = 0$.

Prin urmare f este derivabilă pe $\mathbf{R}$, deci este diferențiabilă pe $\mathbf{R}$, iar diferențiala sa este funcția $df: \mathbf{R} \to \mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ care asociază fiecărui $x \in \mathbf{R}$ funcția liniară și continuă

$$df_x: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ df_x(h) = f'(x) \cdot h = \begin{cases} h \cdot \sin 2x, x < 0 \\ 2x \cdot h \quad , x \geq 0 \end{cases}.$$

Exercițiul 4.3.2. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ unde $f_1(x) = \sin x$,

$$f_2(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x^2 e^{-x}, x > 0 \end{cases}, f_3(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0 \qquad , x = 0 \end{cases}$$

este diferențiabilă pe $\mathbf{R}$ și să se determine diferențiala sa.

Soluție. Demonstrăm că funcțiile f_1, f_2, f_3 sunt diferențiabile pe $\mathbf{R}$.

Evident, f_1 este derivabilă pe $\mathbf{R}$, deci este și diferențiabilă, iar diferențiala sa este $df_1: \mathbf{R} \to \mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $df_{1x}(h) = f'_1(x) \cdot h = h \cdot \cos x$.

Funcția f_2 este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ și

$$f'_2(x) = \begin{cases} -2x \qquad , x < 0 \\ x(2-x)e^{-x}, x > 0 \end{cases}$$

Deoarece $\lim_{x \uparrow 0} f'_2(x) = \lim_{x \downarrow 0} f'_2(x) = 0$ și f este continuă în 0, deducem că f este derivabilă în 0 și $f'_2(0) = 0$. Prin urmare, f_2 este derivabilă pe $\mathbf{R}$, deci este și diferențiabilă pe $\mathbf{R}$ și diferențiala sa este funcția $df_2: \mathbf{R} \to \mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ care asociază fiecărui $x \in \mathbf{R}$ funcția

$$df_{2x}: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ df_{2x}(h) = \begin{cases} -2xh \qquad , x \leq 0 \\ x(2-x)e^{-x}h, x > 0 \end{cases}$$

Componenta f_3 este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ dar nu se poate aplica consecința teoremei lui Lagrange pentru studiul derivabilității în $x = 0$

deoarece derivata f'_3 nu are limită în $x = 0$ ($\cos\frac{1}{x}$ nu are limită în $x = 0$).

Cu definiția, obținem $f'_3(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f_3(x)-f_3(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$,

deci f_3 este derivabilă pe $\mathbf{R}$ și $f'_3(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\quad , x = 0 \end{cases}$.

Rezultă că f_3 este diferențiabilă pe $\mathbf{R}$ și diferențiala sa este funcția df_3: $\mathbf{R} \to \mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ care asociază fiecărui $x \in \mathbf{R}$ funcția $df_{3x}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$df_{3x}(h) = \begin{cases} (2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x})h, x \neq 0 \\ 0, \qquad\qquad x = 0 \end{cases}.$$

Prin urmare funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ dată este diferențiabilă pe $\mathbf{R}$ și diferențiala sa este funcția $df: \mathbf{R} \to \mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^3)$ care asociază fiecărui $x \in \mathbf{R}$ funcția $df_x: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$,
$df_x(h) = (f'_1(x)h, f_2(x)h, f'_3(x)h)$.

Exercițiul 4.3.3. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^3 + xy^2$ este diferențiabilă pe $\mathbf{R}^2$ și să se determine diferențiala sa.

Soluție. Evident, funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, date de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy$ sunt continue pe $\mathbf{R}^2$ și diferențiala sa este funcția $df: \mathbf{R}^2 \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ care asociază fiecărui punct $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ funcția liniară și continuă $df_{(x,y)}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $df_{(x,y)}(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)h_2$ adică

$$df_{(x,y)}(h_1, h_2) = (3x^2 + y^2)\cdot h_1 + 2xy\cdot h_2$$

Exercițiul 4.3.4. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este diferențiabilă pe $\mathbf{R}^2$ și să se determine diferențiala sa.

Soluție. Funcția f are derivate parțiale pe $\mathbf{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$, fiind compunere de funcții derivabile. Folosind regulile de derivare uzuale obținem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} +$$

$$+(x^2 + y^2)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$$

$$= 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x^2+y^2)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= 2x \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

pentru orice $(x, y) \neq (0, 0)$.

Analog $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

pentru orice $(x, y) \neq (0, 0)$.

Cu definiția, obținem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h_1 \to 0}\frac{f(h_1,0) - f(0,0)}{h_1} = \lim_{h_1 \to 0} h_1 \sin\frac{1}{|h_1|} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(0,h_2) - f(0,0)}{h_2} = \lim_{h_2 \to 0} h_2 \sin \frac{1}{|h_2|} = 0$$

Prin urmare, f este derivabilă parțial pe $\mathbf{R}^2$, derivatele parțiale fiind $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, fiind compuneri de funcții elementare. Prin urmare funcția f este diferențiabilă pe mulțimea $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ și diferențiala sa este funcția df: $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ care asociază fiecărui punct $(x,y) \neq (0,0)$ funcția liniară și continuă

$$df_{(x,y)} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ df_{(x,y)}(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot h_2.$$

Pentru studiul diferențiabilității funcției f în $(0,0)$ teorema 4.1.3.2. nu mai este aplicabilă, deoarece $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ nu sunt continue în $(0,0)$

(pentru $x_n = y_n = \frac{1}{2n\pi\sqrt{2}}$, $n \in \mathbf{N}^*$ avem evident $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0, 0)$ şi $\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$).

De accea, pentru studiul diferenţiabilităţii în $(0, 0)$ procedăm astfel: considerăm funcţia liniară şi continuă

$$L_{(0,0)} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ L_{(0,0)}(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)h_2 = 0$$

Pentru $h = (h_1, h_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ avem

$$R(h) = \frac{|f(h_1, h_2) - f(0,0) - L_{(0,0)}(h_1, h_2)|}{\|h\|} =$$

$$= \frac{(h_1^2 + h_2^2)\left|\sin\frac{1}{\sqrt{(h_1^2 + h_2^2)}}\right|}{\sqrt{(h_1^2 + h_2^2)}} = \sqrt{(h_1^2 + h_2^2)}\left|\sin\frac{1}{\sqrt{(h_1^2 + h_2^2)}}\right|$$

Deoarece $\lim_{\|h\|\to 0} R(h) = 0$, deducem că f este diferenţiabilă în $(0, 0)$ şi $df_{(0,0)} = L_{(0,0)}$.

Prin urmare f este diferenţiabilă pe $\mathbf{R}^2$ şi diferenţiala sa este funcţia $df: \mathbf{R}^2 \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ dată de $df_{(x,y)}(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)h_2$.

Exerciţiul 4.3.5. Să se demonstreze că funcţia $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $f(x, y) = (xy, y\sin x, x + y)$ este diferenţiabilă pe $\mathbf{R}^2$ şi să se determine diferenţiala sa.

Soluţie. Componentele funcţiei f sunt funcţii de clasă C^1 pe $\mathbf{R}$, deci diferenţiabile pe $\mathbf{R}^2$.

Dacă $f_1(x, y) = xy$, $f_2(x, y) = y \sin x$, $f_3(x, y) = x + y$, funcţiile $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = y$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = x$, $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = y \cos x$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = \sin x$,

$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) = 1$, $\frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y) = 1$ sunt continue pe $\mathbf{R}^2$. Matricea jacobiană a funcției f este

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ y\cos x & \sin x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ pentru } (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

Diferențiala funcției f este funcția $df : \mathbf{R}^2 \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ care asociază fiecărui punct $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ funcția liniară și continuă $df_{(x, y)}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, dată de

$$df_{(x, y)}(h_1, h_2) = J_f(x, y) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yh_1 + xh_2 \\ (y\cos x)h_1 + (\sin x)h_2 \\ h_1 + h_2 \end{pmatrix}$$

Exercițiul 4.3.6. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$ nu este diferențiabilă în $x = 0$.

Soluție. Deoarece $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin\frac{1}{x}$ pentru orice $x \neq 0$ deducem că f nu este derivabilă în $x = 0$ (putem folosi șirurile $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ și $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$), deci f nu este derivabilă în $x = 0$ și prin urmare nu este nici diferențiabilă în $x = 0$.

Exercițiul 4.3.7. Să se arate că funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ cu $f_1(x) = \begin{cases} \sin^2 x, x \le 0 \\ x^2, x > 0 \end{cases}$, $f_2(x) = \begin{cases} -x^2, & x \le 0 \\ x^2 e^{-x}, x > 0 \end{cases}$ și

$f_3(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ nu este diferențiabilă în $x = 0$.

Soluție. Componentele f_1 și f_2 sunt diferențiabile pe $\mathbf{R}$ (exercițiile 4.3.1., 4.3.2.), dar f_3 nu este diferențiabilă în $x = 0$. Rezultă că f nu este diferențiabilă în $x = 0$.

Exercițiul 4.3.8. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, (x, y) \neq (0,0) \\ 0, \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

nu este diferențiabilă în $(0, 0)$.

Soluție. Deoarece $\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$ pentru orice $x \neq 0$ rezultă că $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. Analog, $\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$ pentru orice $y \neq 0$ arată că $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Funcția $L_{(0,0)}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $L_{(0,0)}(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \cdot h_2 = 0$ iar

$R(h_1, h_2) = \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2}$ pentru orice $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$.

Considerând şirul $\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{\lambda}{n}\right)$, $n\in\mathbf{N}^*$ cu $\lambda\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ parametru fixat, avem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{\lambda}{n}\right)=(0,\ 0)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}R\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{\lambda}{n}\right)=\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$ ceea ce arată că $R(h)$ nu are limită în $(0,\ 0)$. Prin urmare f nu este diferenţiabilă în $(0,\ 0)$. Funcţia f este un exemplu de funcţie continuă, cu derivate parţiale în $(0,\ 0)$ dar care nu este diferenţiabilă în $(0,\ 0)$.

Exerciţiul 4.3.9. Să se determine dz dacă $z(x,\ y)=f\left(\frac{x}{y},xy\right)$, unde $f:A\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ este o funcţie de clasă C^1 pe A.

Soluţie. Notând cu $u,\ v$ variabilele funcţiei f şi folosind regulile de derivare parţială a funcţiilor compuse, obţinem

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,\ y)=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y},xy\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y},xy\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(xy)=$$

$$=\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y},xy\right)+y\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y},xy\right)\ \text{pentru}\ y\neq 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,\ y)=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y},xy\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y},xy\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(xy)=$$

$$=-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y},xy\right)+x\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y},xy\right)\ \text{pentru}\ y\neq 0$$

Deoarece $\frac{\partial f}{\partial u}$ şi $\frac{\partial f}{\partial v}$ sunt continue, rezultă imediat că $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ sunt continue în orice punct $(x,\ y)$ cu $y\neq 0$ şi $dz_{(x,\ y)}(h_1,\ h_2)=\frac{\partial z}{\partial x}(x,\ y)\cdot h_1+\frac{\partial z}{\partial y}(x,\ y)\cdot h_2=\left[\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y},xy\right)+y\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y},xy\right)\right]\cdot h_1+$

$$+\left[-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y},xy\right)+x\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y},xy\right)\right]\cdot h_2$$ pentru orice $y \neq 0$, $(h_1, h_2) \in \mathbf{R}^2$.

Exercițiul 4.3.10. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \qquad\qquad , (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

Demonstrați că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0, 0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0, 0)$.

Soluție. Prin calcul direct rezultă:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\dfrac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad , (x,y)=(0,0) \end{cases}$$ şi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\dfrac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad , (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Atunci:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0, 0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = 1$$ şi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0, 0) = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = -1$$ de

unde rezultă că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0, 0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0, 0)$.

Exercițiul 4.3.11. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right), y \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\quad , y = 0 \end{cases}$

a) Să se arate că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nu este continuă în origine.

b) Să se arate că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Soluție. Prin calcul direct se arată că

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}, y \neq 0 \\ 0 \qquad\quad , y = 0 \end{cases} \text{ și}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 2y \ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right) - \dfrac{2x^2 y}{x^2+y^2}, y \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad , y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 y}{(x^2+y^2)^2}, (x, y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad\qquad , (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Considerăm șirul $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{\lambda}{n}\right)$, $n \in \mathbf{N}^*$ cu $\lambda \neq 0$ se deduce că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nu are limită în $(0, 0)$.

Totuși $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(0, 0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = 0.$

Rezultă că $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 0.$

Exercițiul 4.3.12. Să se determine punctele de extrem local pentru funcția $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

Soluție. Deoarece f este de clasă C^2 pe $\mathbf{R}^3$, rezultă că toate punctele de extrem local se află printre punctele staționare ale lui f. Rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x - y + 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y - x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

se obține un singur punct staționar: $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$.

Hessiana funcției f este aceeași în fiecare punct din $\mathbf{R}^3$.

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

deci $H_f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calculând determinanții principali obținem $\Delta_1=2>0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$

și $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0.$

Deducem că punctul staționar $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)$ este punct de minim local pentru funcția f.

Exercițiul 4.3.13. Să se determine punctele de extrem local pentru funcția $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 - 2xy - 4yz + 20x$.

Soluție. În acest caz $D = D_f = \mathbf{R}^3$. Funcția f fiind de clasă C^2 pe $\mathbf{R}^3$, toate punctele de extrem local pentru f se află printre punctele staționare ale lui f.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x - 2y + 20 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y - 2x - 4z = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{15}{2} \\ y = \frac{5}{2} \\ z = 5 \end{cases}$$

Prin urmare funcția f are un singur punct staționar $\left(-\frac{15}{2},\frac{5}{2},5\right)$. Deoarece derivatele parțiale de ordinul doi sunt constante, hessiana funcției f este aceeași în orice punct din $\mathbf{R}^3$.

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii se obțin rezolvând ecuația:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 2-\lambda & -4 \\ 0 & -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Rezultă $(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda - 16) = 0$. Se obține $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_2 = 2(1 + \sqrt{5}) > 0$, $\lambda_3 = 2(1 - \sqrt{5}) < 0$.

Prin urmare punctul $\left(-\frac{15}{2}, \frac{5}{2}, 5\right)$ este punct staționar pentru f, dar nu este punct de extrem local pentru această funcție. Având în vedere că orice punct de extrem local trebuie să fie punct staționar deducem că f nu are puncte de extrem local.

Exercițiul 4.3.14. Să se determine punctele de extrem local pentru funcția $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^3y^2(6 - x - y)$.

Soluție. Funcția f este de clasă C^2 pe $\mathbf{R}^2$ și are o infinitate de puncte staționare.

Într-adevăr, rezolvând sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ adică

$$\begin{cases} 18x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0 \\ 12x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 = 0 \end{cases}$$

se obțin următoarele puncte staționare: $(\alpha, 0)$, $\alpha \in \mathbf{R}$; $(0, \beta)$, $\beta \in \mathbf{R}$; $(3, 2)$.

Derivatele parțiale de ordinul doi sunt :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 36xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 36x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12x^3 - 2x^4 - 6x^3y.$

Se obţin următoarele matrici hessiene:

$H(\alpha, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12\alpha^3 - 2\alpha^4 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbf{R}$

$H(0, \beta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\beta \in \mathbf{R}$ şi $H(3, 2) = \begin{pmatrix} -144 & -108 \\ -108 & -162 \end{pmatrix}$.

Punctul (3, 2) este punct de maxim local pentru f deoarece $\Delta_1 = -144 < 0$, $\Delta_2 = 2^4 \cdot 3^6 > 0$. Pentru a decide natura celorlalte puncte staţionare nu se poate folosi teorema 4.1.3.6. Deoarece aplicarea formulei Taylor este anevoioasă (primele derivate nenule în (0, 0) sunt de ordinul 5), studiem direct semnul creşterilor $f(x, y) - f(\alpha, 0)$ şi $f(x, y) - f(0, \beta)$.

Evident, $sgn[f(x, y) - f(\alpha, 0)] = sgn[x(6 - x - y)]$.

Dacă $\alpha < 0$ atunci există $V_1 \in \mathcal{V}(\alpha, 0)$ astfel încât $f(x, y) - f(\alpha, 0) < 0$ pentru orice $(x, y) \in V_1$ deci orice punct $(\alpha, 0)$ cu $\alpha < 0$ este punct de maxim local pentru f.

Dacă $\alpha = 0$ există $V_2 \in \mathcal{V}(0, 0)$ astfel încât $6 - x - y > 0$ pentru orice $(x, y) \in V_2$, deci pentru orice $(x, y) \in V_2$, $sgn[f(x, y) - f(\alpha, 0)] = sgn(x)$.

Este evident că $f(x, y) - f(\alpha, 0)$ nu păstrează semn constant pe nici o vecinătate a lui (0, 0) ceea ce arată că (0, 0) nu este punct de extrem pentru f.

Dacă $0 < \alpha < 6$, există $V_3 \in \mathcal{V}(\alpha, 0)$ astfel încât $f(x, y) - f(\alpha, 0) > 0$ pentru orice $(x, y) \in V_3$, deci orice punct $(\alpha, 0)$ cu $\alpha \in (0, 6)$ este punct de minim local pentru f.

Punctul $(6, 0)$ nu este punct de extrem local pentru f. Într-adevăr, există $V_4 \in \mathcal{V}(6, 0)$ conţinută în întregime în semiplanul $x > 0$. Pentru orice $(x, y) \in V_4$, $sgn[f(x, y) - f(6, 0)] = sgn(6 - x - y)$. Este evident acum că $f(x, y) - f(6, 0)$ nu păstrează semn constant în nici o vecinătate a punctului (6, 0).

Dacă $\alpha > 6$, există $V_5 \in \mathcal{V}(\alpha, 0)$ astfel încât pentru orice $(x, y) \in V_5$ să avem $f(x, y) - f(\alpha, 0) < 0$ ceea ce arată că orice punct $(\alpha, 0)$ cu $\alpha > 6$ este punct de maxim local pentru f.

Analizăm la fel punctele $(0, \beta)$, $\beta \in \mathbf{R}$.

Deoarecc $sgn[f(x, y) - f(0, \beta)] = sgn[x(6 - x - y)]$ şi orice vecinătate a punctului $(0, \beta)$ intersectează atât semiplanul $x< 0$ cât şi semiplanul $x> 0$ rezultă că $f(x, y) - f(0, \beta)$nu are semn constant pe nici o vecinătate a nici unui punct $(0, \beta)$, deci nici un punct $(0, \beta)$, $\beta \in \mathbf{R}$ nu este punct de extrem local pentru f.

Exercițiul 4.3.15. Să se determine punctele de extrem local pentru funcția $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = ln(1 + |x - y|)$.

Soluție. Funcția are derivate parțiale pe mulțimea $\mathbf{R}^2 \setminus \{(\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbf{R}\}$ şi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x-y}, x > y \\ \dfrac{-1}{1+y-x}, x < y \end{cases}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{-1}{1+x-y}, x > y \\ \dfrac{1}{1+y-x}, x < y \end{cases}$$

Deoarece rapoartele: $R_1(x) = \dfrac{f(x,\alpha) - f(\alpha,\alpha)}{x - \alpha}$ şi

$R_2(x) = \dfrac{f(\alpha, y) - f(\alpha,\alpha)}{y - \alpha}$ nu au limită în punctul α, rezultă că f nu este derivabilă parțial nici în raport cu x, nici în raport y, în punctul (α, α), $\alpha \in \mathbf{R}$.

Este evident că funcția f nu are puncte staționare.

Deoarece $f(x, y) - f(\alpha, \alpha) = f(x, y) = ln(1 + |x - y|) \geq ln\ 1 = 0$, pentru orice $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ rezultă (α, α) este punct de minim local şi global pentru f.

Prin urmare această funcție are o infinitate de puncte de minim, nici un punct de maxim, nici un punct staționar.

Exercițiul 4.3.16. Să se demonstreze că originea este punct de extrem local pentru funcția $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin^2 \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, (x, y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad , (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

dar teorema 4.1.3.6. nu este aplicabilă în acest caz.

Soluție. Prin calcul direct se arată că

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}2x\sin^2\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}2y\sin^2\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Funcția f este derivabilă parțial pe $\mathbf{R}^2$ în raport cu fiecare variabilă și originea este punct staționar.

Dar în (0, 0) funcția nu este de două ori derivabilă în raport cu x pentru că raportul $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x}=2\sin^2\dfrac{1}{|x|}-\dfrac{1}{|x|}\sin\dfrac{2}{|x|}$, $x\neq 0$ nu are limită când $x\to 0$.

Rezultă că nu poate fi aplicată teorema 4.1.3.6. pentru a decide dacă punctul staționar (0, 0) este punct de extrem local.

Deoarece $f(x, y)-f(0, 0)\geq 0$ pentru orice $(x, y)\in\mathbf{R}^2$ rezultă că (0, 0) este punct de minim local și global pentru f.

Exercițiul 4.3.17. Să se demonstreze că originea este punct de minim global pentru funcția $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases}y^2\ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right), & y\neq 0\\ 0 & ,y=0\end{cases}$$

Soluţie. Deoarece $f(x, y) - f(0, 0) = y^2 ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) \geq 0$ pentru orice $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ rezultă că (0, 0) este punct de extrem global şi local pentru f. Nici în acest caz teorema 4.1.3.6. nu poate fi aplicată.

4.4. Exerciţii propuse

Exerciţiul 4.4.1. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi ale următoarelor funcţii, precizând şi domeniul lor de definiţie:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3axy$ b) $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$ c) $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

d) $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ e) $f(x, y) = x^y$ f) $f(x, y) = e^{\frac{y}{x}}$

g) $f(x, y) = \sin\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ h) $f(x, y, z) = \operatorname{arctg}\frac{z}{xy}$.

Exerciţiul 4.4.2. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi ale următoarelor funcţii; precizând şi domeniul lor de definiţie:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad , (x, y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad , (x, y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} \sin\frac{1}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad\qquad\qquad , (x, y) = (0,0) \end{cases}$

Exercițiul 4.4.3. Demonstrați că funcția $z(x, y) = y \cdot \Phi(x^2 - y^2)$ verifică ecuația $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$ unde Φ este o funcție de clasă C^1 pe $\mathbf{R}$.

Exercițiul 4.4.4. Demonstrați că funcția $z(x, y) = xy + x \cdot \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$ verifică ecuația $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot y + z$ unde Φ este o funcție de clasă C^1 pe $\mathbf{R}$.

Exercițiul 4.4.5. Fie $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

a) Determinați derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției f și studiați continuitatea lor.

b) Studiați diferențiabilitatea funcției f în $(0, 0)$.

Exercițiul 4.4.6. Demonstrați că o funcție $f: \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, care satisface inegalitatea $|f(x)| \leq \|x\|^2$ pentru orice $x \in \mathbf{R}^p$ este diferențiabilă în $\theta_{\mathbf{R}^p}$.

Exercițiul 4.4.7. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = \sin(xy^2)$ este diferențiabilă pe $\mathbf{R}^2$ și să se calculeze diferențiala sa.

Exercițiul 4.4.8. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $f(x, y) = (\sin xy, \sin(x \sin y), \sin x - \cos y)$ este diferențiabilă pe $\mathbf{R}^2$ și să se determine df.

Exercițiul 4.4.9. Fie $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \ln(x^2 + y^2 + z^2), (x, y, z) \neq (0,0,0) \\ -\frac{\pi}{2}, (x, y, z) = (0,0,0) \end{cases}$$

a) Studiați diferențiabilitatea funcției f în $(0, 0, 0)$

b) Determinați $(\mathrm{grad} f)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

c) Determinați $\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ unde v este versorul gradientului funcției f în punctul $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Exercițiul 4.4.10. Fie $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^2 \cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Demonstrați că f are derivate parțiale de ordinul doi pe $\mathbf{R}^2$.

b) Demonstrați că $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

c) Demonstrați că f nu este de clasă C^2 pe $\mathbf{R}^2$.

Exercițiul 4.4.11. Demonstrați că dacă $z(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$ atunci $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ oricare ar fi funcțiile f și g de clasă C^2 pe $\mathbf{R}$.

Exercițiul 4.4.12. Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ și $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ dacă

$z(x, y) = f(x^2 + y^2, x^2 - y^2, xy)$ unde f este o funcție de clasă C^2 pe $\mathbf{R}^3$.

Exercițiul 4.4.13. Să se scrie formula lui Taylor pentru funcția $f(x, y) = e^x \sin y$ și punctul (0, 0).

Exercițiul 4.4.14. Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$,

$$f = (f_1, f_2), f_1(x, y) = (x - 1)e^y, f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{|x|+|y|}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad\quad , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

în (0, 0).

R. f este diferențiabilă în (0, 0); $df_{(0,0)}(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} h_1 - h_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercițiul 4.4.15 Se dau funcțiile f, g: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2)$ unde $f_1(x, y) = x^3 - y^3$, $f_2(x, y) = 3x^2y + 3xy^2$, $g_1(x, y) = x + y$, $g_2(x, y) = x - y$. Să se arate că funcțiile $f, g, f \circ g$ sunt diferențiabile pe $\mathbf{R}^2$ și să se scrie df, dg, $f \circ g$ și $d(f \circ g)$.

R. $df_{(x,y)}(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} 3x^2h_1 - 3y^2h_2 \\ (6xy + 3y^2)h_1 + (3x^2 + 6xy)h_2 \end{pmatrix}$

$dg_{(x,y)}(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} h_1 + h_2 \\ h_1 - h_2 \end{pmatrix}$

$(f \circ g)(x, y) = (6x^2y + 2y^3, 6x^3 - 6xy^2)$

$d(f \circ g)_{(x,y)}(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} 12xy & 6x^2 + 6y^2 \\ 18x^2 - 6y^2 & -12xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 12xyh_1 + (6x^2 + 6y^2)h_2 \\ (18x^2 - 6y^2)h_1 - 12xyh_2 \end{pmatrix}$ pentru orice $(x, y), (h_1, h_2) \in \mathbf{R}^2$

Exercițiul 4.4.16 Să se studieze continuitatea și diferențiabilitatea funcției $f: \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{N}^*$,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2 \ldots x_p}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2}, (x_1, x_2, \ldots, x_p) \neq \theta_{R^p} \\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad , (x_1, x_2, \ldots, x_p) = \theta_{R^p} \end{cases}$$

în origine.

R. $p = 1, 2$ f nu este continuă în origine (deci nu e nici diferențiabilă)

$p = 3$ f este continuă în origine, dar nu este diferențiabilă

$p > 3$ f este diferențiabilă.

Exercițiul 4.4.17. Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} \| x \|^{\alpha} \cdot \cos \dfrac{1}{\| x \|}, x \neq \theta_{R^p} \\ 0, \quad x = \theta_{R^p} \end{cases}$, $\alpha > 1$, în origine.

R. f este diferențiabilă în θ_{R^p} și $df_{\theta_{R^p}}(h) = 0$, $\forall h \in \mathbf{R}^p$.

Exercițiul 4.4.18. Fie $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x \cdot \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, $x \neq 0$, $y \in \mathbf{R}$ unde φ și ψ sunt funcții de clasă C^2 pe $\mathbf{R}$. Să se arate că :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Exercițiul 4.4.19. Să se determine extremele locale ale următoarelor funcții:

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ b) $f(x) = arctg \dfrac{1-x}{1+x}$ c) $f(x) = \dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$

d) $f(x) = |x - 1|$ e) $f(x) = \sqrt{e^{x^2} - 1}$ f) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

R. a) $x = -1$ punct de maxim local, $x = 1$ punct de minim local; b) nu are;

c) $x = \dfrac{1}{2}$ punct de minim local; d) $x = 1$ punct de minim local; e) $x = 0$ punct de minim local; f) $x = e$ punct de minim local.

Exercițiul 4.4.20. Să se determine punctele de extrem local pentru următoarele funcții:

a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ b) $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$

c) $f(x, y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$ d) $f(x, y) = xy^2 e^{x-y}$

e) $f(x, y) = \dfrac{1}{(x+1)(y+2)(x+y)}$ f) $f(x, y) = \dfrac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

g) $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ h) $f(x, y) = \ln(1 + \sqrt{x^2 + y^2})$

R. a) (1, 1) punct de minim local; b) $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ punct de minim local;

c) (0, 0), $\left(-\frac{5}{3},0\right)$ puncte de minim local; d) (-1, 2) punct de maxim local, (α, 0) este punct de minim local dacă $\alpha > 0$, punct de maxim local şi nu e punct de extrem dacă $\alpha = 0$; e) (2, 1) punct de maxim local; f) (1, 0) punct de maxim local, (1, 1) punct de minim local; g) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ şi $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ sunt puncte de maxim local, iar $\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ şi $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ sunt puncte de minim local; h) (0, 0) punct de minim local.

Exerciţiul 4.4.21. Să se determine punctele de extrem local ale următoarelor funcţii:

a) $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz$
b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - xy + xz + 2yz$
c) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$
d) $f(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + d$
e) $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4x - 2y + 6z - 3$
f) $f(x, y, z) = xyz - (x + y)\ln z + 5$

R. a) (0, 0, 0) punct de minim local; b) (0, 0, 0) punct de minim local; c) (24, -114, -1) punct de minim local; d) (a, b, c) punct de minim local;

e) $\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{3}\right)$ punct de minim local.

Exerciţiul 4.4.22. Să se demonstreze că funcţia $f(x, y) = (1 + e^x)\cos y - xe^x$ $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ are o infinitate de puncte de maxim local şi nici un punct de minim local.

5. FUNCŢII IMPLICITE. EXTREME CONDIŢIONATE.

5.1. Noţiuni teoretice. Rezultate fundamentale.

5.1.1. Funcţii implicite.

În capitolele precedente am studiat funcţii de una sau mai multe variabile date sub formă explicită, adică de forma $y = f(x)$, unde f ne arată concret cum depinde y de x . Sunt situaţii însă când legătura între mărimile x şi y este dată implicit de o ecuaţie de forma $F(x, y) = 0$, explicitarea în raport cu y, de exemplu, nefiind posibilă întotdeauna în mod univoc.

În cele ce urmează vom arăta când este posibilă explicitarea unei ecuaţii $F(x, y) = 0$ şi ce proprietăţi putem deduce pentru explicitarea f (a cărei expresie analitică nu poate fi găsită în general) din proprietăţile funcţiei F.

Definiţia 5.1.1.1. Fie ecuaţia $F(x, y) = 0$ unde $F : D \to \mathbf{R}$ este o funcţie dată, definită pe mulţimea deschisă $D \subseteq \mathbf{R}^2$. Fie D_x proiecţia lui D pe axa Ox şi fie $A \subseteq D_x$.

O funcţie $f : A \to \mathbf{R}$ se numeşte *soluţie* sau *explicitare* (în raport cu y) a ecuaţiei $F(x, y) = 0$ pe mulţimea A, dacă pentru orice $x \in A$, $F(x, f(x)) = 0$. Dacă există o singură explicitare f pentru ecuaţia $F(x, y) = 0$, funcţia f se numeşte *funcţie definită implicit* de ecuaţia $F(x, y) = 0$ sau, pe scurt, *funcţie implicită (de o variabilă)*

Teorema 5.1.1.1. Fie ecuaţia $F(x, y) = 0$ unde $F : D \to \mathbf{R}$ este o funcţie dată, definită pe mulţimea deschisă $D \subseteq \mathbf{R}^2$. Fie $(x_0, y_0) \in D$. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:

1) $F(x_0, y_0) = 0$;
2) F este de clasă C^1 pe o vecinătate a punctului (x_0, y_0);

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$

atunci

a) există $U \in \mathcal{V}(x_0)$, $V \in \mathcal{V}(y_0)$ şi o explicitare unică $f: U \to V$ (în raport cu y) a ecuaţiei $F(x, y) = 0$ astfel încât $f(x_0) = y_0$;

b) explicitarea f este de clasă C^1 pe U şi pentru orice $x \in U$,

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

Această teoremă poate fi extinsă uşor la funcţii implicite de mai multe variabile.

Definiţia 5.1.1.2. Fie ecuaţia $F(x_1, x_2, \ldots, x_p; y) = 0$, unde $F : D \to \mathbf{R}$ este o funcţie dată, definită pe mulţimea deschisă $D \subseteq \mathbf{R}^{p+1}$. Fie $A \subseteq \mathbf{R}^p$ o mulţime cu proprietatea că pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in A$ există $y \in \mathbf{R}$ încât $(x, y) \in D$. O funcţie $f: A \to \mathbf{R}$ se numeşte *soluţie* sau *explicitare* (în raport cu y) a ecuaţiei $F(x_1, x_2, \ldots, x_p; y) = 0$ pe mulţimea A, dacă pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in A$ avem: $F(x_1, x_2, \ldots, x_p; f(x_1, x_2, \ldots, x_p)) = 0$. Dacă există o singură explicitare f a ecuaţiei date, funcţia f se numeşte *funcţie definită implicit* de ecuaţia $F(x_1, x_2, \ldots, x_p; y) = 0$ sau, pe scurt, *funcţie implicită* (de variabilele reale $x_1, x_2, \ldots, x_p$)

Observaţia 5.1.1.1. Dacă notăm $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ ecuaţia $F(x_1, x_2, \ldots, x_p; y) = 0$ se poate scrie $F(x, y) = 0$ iar soluţia $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ se scrie $y = f(x)$. Deci, putem considera numai ecuaţii de forma $F(x, y) = 0$ în care x este variabilă reală sau vectorială.

Teorema 5.1.1.2. Fie ecuaţia $F(x, y) = 0$, unde $F : D \to \mathbf{R}$ este o funcţie dată, definită pe mulţimea deschisă $D \subseteq \mathbf{R}^{p+1}$.

Fie $(x_0, y_0) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0; y_0) \in D$. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:

1) $F(x_0, y_0) = 0$;

2) F este de clasă C^1 pe o vecinătate a punctului (x_0, y_0) ;

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$

atunci:

a) există $U \in \mathcal{V}(x_0)$, $V \in \mathcal{V}(y_0)$ şi o explicitare unică $f: U \to V$ a ecuaţiei $F(x, y) = 0$ (în raport cu y) încât $f(x_0) = y_0$;

b) explicitarea f este de clasă C^1 pe U şi pentru orice $x \in U$ şi orice $j = 1, 2, \ldots, p$ avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

Să considerăm acum problema funcţiilor definite implicit prin sisteme de ecuaţii.

Definiţia 5.1.1.3. Fie $F_i: D \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ funcţii date, definite pe mulţimea deschisă $D \subseteq \mathbf{R}^{p+m}$. Fie $A \subseteq \mathbf{R}^p$ o mulţime cu proprietatea că pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ există $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbf{R}^m$ astfel încât $(x, y) \in D$. Un sistem de funcţii $\{f_i: A \to \mathbf{R}, i = 1, 2, \ldots, m\}$ se numeşte *soluţie* sau *explicitare* (în raport cu variabilele $y_1, y_2, \ldots, y_m$) pe mulţimea A a sistemului de ecuaţii $F_i(x, y) = 0, i = 1, 2, \ldots, m$ dacă
$F_i(x, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)) = 0$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, m$ şi orice $x \in A$.

Dacă sistemul de ecuaţii dat are pe mulţimea A o singură soluţie $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$, spunem că funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sunt *definite implicit de sistemul de ecuaţii* dat sau, pe scurt, sistemul de funcţii $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ este un *sistem de funcţii implicite* (de variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_p$)

Observaţia 5.1.1.2. Dacă pentru simplificarea scrierii, se notează $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, $F = (F_1, F_2, \ldots, F_m)$, atunci F este o funcţie vectorială definită pe mulţimea deschisă $D \subseteq \mathbf{R}^{p+m}$ cu valori în $\mathbf{R}^m$, iar sistemul se scrie mai simplu:

$$F(x, y) = \theta_{\mathbf{R}^m}$$

Dacă se notează $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ atunci f este o funcţie vectorială definită pe mulţimea deschisă $A \subseteq \mathbf{R}^p$ cu valori în $\mathbf{R}^m$. A spune că sistemul de funcţii $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ este o soluţie a sistemului de ecuaţii dat revine la a spune că funcţia vectorială f este o soluţie a ecuaţiei vectoriale

$$F(x, y) = \theta_{\mathbf{R}^m}$$

adică $F(x, f(x)) = \theta_{R^m}$ pentru orice $x \in A$. În acest fel, un sistem de m funcții implicite reale, definite de un sistem de m ecuații, este echivalent cu o singură funcție implicită vectorială, definită de o ecuație vectorială. Se poate extinde acum ușor, teorema de explicitare de la ecuații la sisteme.

Teorema 5.1.1.3. Fie sistemul:

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_p; y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

unde $F_i : D \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ sunt funcții date, definite pe mulțimea deschisă $D \subseteq \mathbf{R}^{p+m}$. Fie $(x_0, y_0) = (x_1^0, \ldots, x_p^0; y_1^0, \ldots, y_m^0) \in D$. Dacă sunt îndeplinite condițiile:

1) $F_i(x_0, y_0) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$;
2) Funcțiile F_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ sunt de clasă C^1 pe o vecinătate a punctului (x_0, y_0);
3) $\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}(x_0, y_0) \neq 0,$

atunci

a) există $U \in \mathcal{V}(x_0)$, $V \in \mathcal{V}(y_0)$ și o explicitare unică $f : U \to V$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ a sistemului dat astfel încât $f(x_0) = y_0$;
b) funcțiile reale $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sunt de clasă C^1 pe U și

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = -\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, x_j, \ldots, y_m)}(x, f(x))}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_m)}(x, f(x))}$$

pentru orice $x \in U$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, p$.

(determinantul de la numărător se obține din jacobianul de la numitor prin înlocuirea coloanei derivatelor în raport cu y_i cu coloana derivatelor în raport cu x_j).

Observația 5.1.1.3. a) Oricare dintre cele trei teoreme anterioare reprezintă o teoremă de existență a funcției implicite f (scalare sau vectoriale, de una sau mai multe variabile); sunt date condiții suficiente care asigură existența funcției implicite, de clasă C^1, fără a da o metodă efectivă de explicitare, acest lucru nefiind, în general, posibil.

b) Punctele critice ale funcției $y = y(x)$ definită implicit de ecuația $F(x,y)= 0$ se determină punând condiția necesară $y' = 0$, adică rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0 \end{cases}$$

Pentru precizarea punctelor de extrem se află semnul lui y'' în fiecare din punctele critice.

c) Dacă $F : D \to \mathbf{R}$ este o funcție de clasă C^2 pe mulțimea deschisă $D \subseteq \mathbf{R}^3$ ecuația $F(x, y, z) = 0$ definește local, în condițiile teoremei 5.1.1.2., o funcție $z = z(x, y)$, astfel încât să aibă loc identitatea $F(x, y, z(x, y)) = 0$; deși, în general, această funcție nu se poate explicita efectiv, se pot calcula derivatele parțiale de ordinul întâi și doi ale lui z, iar pentru a determina extremele locale ale funcției z, se determină mai întâi punctele critice, rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \neq 0 \end{cases}$$

Se determină apoi semnul expresiei $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$ în fiecare dintre punctele critice, apoi semnul lui $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ în fiecare dintre punctele în care această expresie este strict pozitivă.

5.1.2. Transformări punctuale în $\mathbf{R}^p$. Schimbări de coordonate.

Se ştie că o funcţie reală de o variabilă reală f este inversabilă dacă şi numai dacă este bijectivă, iar, în anumite condiţii, unele proprietăţi ale funcţiei f se transmit funcţiei inverse f^{-1}. A determina f^{-1} este echivalent cu a explicita, în raport cu x, ecuaţia $f(x) - y = 0$.

Pentru funcţii de mai multe variabile, problema inversării este mai complicată. Dacă $A \subseteq \mathbf{R}^p$ şi $f : A \to \mathbf{R}^m$ este o funcţie vectorială de componente $f_1, f_2, \ldots, f_m$, ecuaţia vectorială $f(x) - y = \theta_{\mathbf{R}^m}$ este echivalentă cu sistemul

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_p) - y_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

iar determinarea inversei (atunci când există) revine la explicitarea sistemului în raport cu variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Conform celor prezentate în teorema 5.1.1.3., numărul variabilelor ce pot fi explicitate coincide cu numărul de ecuaţii; prin urmare, trebuie ca $m = p$, iar pentru a putea utiliza teorema 5.1.1.3. trebuie considerate funcţii de clasă C^1. De aceea, în cele ce urmează, considerăm $A \subseteq \mathbf{R}^p$ mulţime deschisă, $T : A \to \mathbf{R}^p$ de clasă C^1 pe A şi căutăm condiţii care să asigure existenţa inversei $T^{-1}: B \to A$, unde $B = T(A)$, precum şi diferenţiabilitatea lui T^{-1}.

Definiţia 5.1.2.1. Fie $A \subseteq \mathbf{R}^p$, $B \subseteq \mathbf{R}^p$ mulţimi deschise.
O aplicaţie $T:A \to B$ de clasă C^1 pe A se numeşte *transformare punctuală* de la A la B.

Prin aplicaţia T,de componente $f_1, f_2, \ldots, f_p$,oricărui punct $x=(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in A$ îi corespunde un punct bine determinat $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in B$ unde $y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_p), \ldots, y_p = f_p(x_1, \ldots, x_p)$ ceea ce justifică denumirea de transformare punctuală.

Definiţia 5.1.2.2. Fie $A \subseteq \mathbf{R}^p$, $B \subseteq \mathbf{R}^p$ mulţimi deschise. O transformare punctuală $T:A \to B$ se numeşte *difeomorfism* (sau *transformare regulată*) dacă T este bijectivă şi inversa ei $T^{-1}: B \to A$ este o transformare punctuală de la B la A.

Aplicând teorema 5.1.1.3. pentru sistemul $f_i(x_1, \ldots, x_p) - y_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$, în teorema următoare sunt date condiţii suficiente pentru ca transformarea punctuală T, de componente $f_1, f_2, \ldots, f_p$ să aibă o restricţie inversabilă, iar inversa să fie tot o transformare punctuală, adică, local, să fie difeomorfism.

Teorema 5.1.2.1. (de inversiune locală) Fie $T : A \to \mathbf{R}^p$ o transformare punctuală, de componente $f_1, f_2, \ldots, f_p$, pe mulţimea deschisă $A \subseteq \mathbf{R}^p$ şi fie $x_0 \in A$ un punct astfel încât

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)}(x_0) \neq 0$$

Atunci există o vecinătate deschisă U_0 a punctului x_0 şi o vecinătate deschisă V_0 a punctului $y_0 = T(x_0)$, astfel ca T să fie difeomorfism de la U_0 la V_0.

Observaţia 5.1.2.1. a) Dacă $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ sunt componentele transformării inverse T^{-1}, ţinând seama de observaţia 4.1.4.1. b), avem:

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)}(x_0) \cdot \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_p)}(T(x_0)) = 1,$$

adică:

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_p)}(T(x_0)) = \left[\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)}(x_0)\right]^{-1}$$

Această egalitate corespunde formulei care dă derivata funcţiei inverse a unei funcţii derivabile de o variabilă. Deci, din acest punct de vedere, în cazul transformărilor punctuale, rolul derivatei îl joacă jacobianul transformării.

b) Rezultatul stabilit în teorema 5.1.2.1. are un caracter local, chiar dacă jacobianul transformării este nenul în orice punct din A. De exemplu, dacă

$T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ este transformarea dată prin $x(r, \theta) = r\cos\theta$, $y(r, \theta) = r\sin\theta$ jacobianul transformării T este $\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = r$; conform teoremei 5.1.2.1., orice punct (r, θ) cu $r \neq 0$ are o vecinătate în care transformarea T este bijectivă, dar T nu este bijectivă pe $\mathbf{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$ din cauza periodicității funcțiilor *sin* și *cos*, imaginile punctelor diferite (r, θ), $(r, \theta + 2\pi)$ coincid, deci T nu este injectivă.

Definiția 5.1.2.3. Fie $A \subseteq \mathbf{R}^p$ o mulțime deschisă. O transformare punctuală injectivă $T : A \to \mathbf{R}^p$ care stabilește un difeomorfism de la A la $B = T(A)$ se numește *schimbare de coordonate* în A. Dacă $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sunt componentele lui T, atunci pentru orice $x \in A$, numerele $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)$ se numesc *coordonatele lui x în sistemul de coordonate T.*

Exemplul 5.1.2.1. Fie $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0 \text{ și } y > 0\}$.

Aplicația $T : A \to \mathbf{R}^2$, $T(x, y) = (r, \theta)$ unde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = arctg\,\frac{y}{x}$ este o schimbare de coordonate, numită trecerea de la coordonate carteziene la coordonate polare în A.

Observația 5.1.2.2. Teorema 5.1.2.1. afirmă că, dacă T este o transformare punctuală cu jacobianul nenul într-un punct x_0, atunci, local, (într-o vecinătate a lui x_0) T este o schimbare de coordonate.

5.1.3. Extreme condiționate. Puncte de extrem global.

Ne punem mai întâi problema determinării extremelor unei funcții luând în considerare valorile acesteia doar în punctele care îndeplinesc anumite condiții suplimentare date. De exemplu, dacă se cere să se determine acel punct al planului $x + y + z = 1$ care se află la cea mai mică distanță față de origine, trebuie să determinăm, evident, minimul funcției $d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ luând în considerare doar tripletele (x, y, z) care îndeplinesc condiția $x + y + z = 1$. Aceasta este o problemă simplă de extrem condiționat. O cale naturală de rezolvare este următoarea: se explicitează ecuația dată în raport cu z, de exemplu, se introduce z în expresia funcției și se obține o problemă de extrem obișnuit pentru funcția de două variabile obținută (care reprezintă restricția funcției d la planul

considerat). Deoarece practic această explicitare, în general, nu este realizabilă, se recurge la o metodă indirectă, bazată pe teorema funcțiilor implicite, pe care o vom prezenta în continuare.

Definiția 5.1.3.1. Fie $D \subseteq \mathbf{R}^{p+m}$ o mulțime deschisă, $f : D \to \mathbf{R}$ o funcție de clasă C^1 pe D. Presupunem că între variabilele $x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_m$ există m condiții (restricții, legături): $g_i(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_m) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, unde $g_i : D \to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, m$ sunt de clasă C^1 pe D. Fie

$M = \{(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_m) \in D: g_i(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_m) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$

Se numește *punct de extrem local al funcției f condiționat de* $g_i(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_m) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ orice punct $(x_1^0, \ldots, x_p^0; y_1^0, \ldots, y_m^0) \in M$ pentru care există o vecinătate $V \subseteq D$, încât diferența $f(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_m) - f(x_1^0, \ldots, x_p^0; y_1^0, \ldots, y_m^0)$ să aibă semn constant pe $M \cap V$.

Utilizând teorema 5.1.1.3. pentru sistemul $g_i(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_m) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, teorema care urmează dă condiții necesare ca un punct să fie punct de extrem local condiționat pentru o funcție dată.

Teorema 5.1.3.1. (Lagrange) Fie $f : D \to \mathbf{R}$ o funcție de clasă C^1 pe mulțimea deschisă $D \subseteq \mathbf{R}^{p+m}$.

Fie $(x_1^0, \ldots, x_p^0; y_1^0, \ldots, y_m^0) \in D$ un punct de extrem local al funcției f, condiționat de legăturile $g_i(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_m) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ unde funcțiile $g_i : D \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ sunt de clasă C^1 pe D și

$$\frac{D(g_1, g_2, \ldots, g_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}(x_1^0, \ldots, x_p^0; y_1^0, \ldots, y_m^0) \neq 0$$

Atunci există m numere reale $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ astfel încât punctul $(x_1^0, \ldots, x_p^0; y_1^0, \ldots, y_m^0)$ să fie punct critic pentru funcția

$$F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_m g_m$$

(Numerele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ se numesc *multiplicatori Lagrange*, iar funcția F se numește *funcție Lagrange*)

Observația 5.1.3.1. Dacă

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f(x_1, \ldots, x_p; y_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_p))$$

unde $y_1 = y_1(x_1, \ldots, x_p)$, $y_2 = y_2(x_1, \ldots, x_p)$, $\ldots$, $y_m = y_m((x_1, \ldots, x_p))$ sunt explicitări locale ale sistemului $g_i(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_m) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ atunci funcția Φ reprezintă restricția funcției f la mulțimea M și, evident, $(x_1^0, \ldots, x_p^0; y_1^0, \ldots, y_m^0)$ este punct de extrem local pentru f, condiționat de $g_i(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_m) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ dacă și numai dacă $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$

este punct de extrem local pentru funcţia Φ. Prin urmare, în practică, teorema 5.1.3.1. se aplică astfel: fiind date funcţia f şi legăturile $g_i(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_m) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ se consideră funcţia Lagrange $F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_m g_m$ cu numerele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ nedetrminate; se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j}(x_1,\ldots,x_p;y_1,\ldots,y_m) = 0, j = 1,2,\ldots,p \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_i}(x_1,\ldots,x_p;y_1,\ldots,y_m) = 0, i = 1,2,\ldots,m \\ g_i(x_1,\ldots,x_p;y_1,\ldots,y_m) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,m \end{cases}$$

Acest sistem are $p + 2m$ ecuaţii şi $p + 2m$ necunoscute. Dacă $x_1^0, \ldots, x_p^0; y_1^0, \ldots, y_m^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0$ este o soluţie a acestui sistem, atunci $(x_1^0, \ldots, x_p^0; y_1^0, \ldots, y_m^0)$ este punct critic pentru funcţia Lagrange F corespunzătoare multiplicatorilor $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0$. Pentru a vedea dacă $(x_1^0, \ldots, x_p^0; y_1^0, \ldots, y_m^0)$ este punct de extrem condiţionat pentru f este suficient să verificăm dacă $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$ este punct de extrem local pentru funcţia Φ; dacă f şi g_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ sunt funcţii de clasă C^2 putem studia hessiana funcţiei Φ în punctul $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$.

Definiţia 5.1.3.2. Fie $f : A \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ o funcţie arbitrară $x_0 \in A$. Punctul x_0 se numeşte *punct de extrem global* al funcţiei f dacă diferenţa $f(x) - f(x_0)$ are semn constant pe A. Mai precis, punctul x_0 se numeşte *punct de maxim* (respectiv *minim*) *global* al lui f dacă pentru orice $x \in A$ avem $f(x) - f(x_0) \leq 0$ (respectiv $f(x) - f(x_0) \geq 0$)

Observaţia 5.1.3.2. Dacă f este de clasă C^1 pe A atunci f este diferenţiabilă şi, prin urmare, continuă pe A. Ţinând seama de teorema 3.1.5.4., dacă A este compactă atunci f este mărginită şi îşi atinge marginile pe A. Prin urmare, există $x_*, x^* \in A$ astfel încât $f(x_*) = \inf f(A)$, $f(x^*) = \sup f(A)$. Evident, x_* este punct de minim global, iar x^* este punct de maxim global pentru funcţia f. Dacă $Int(A)$ reprezintă interiorul mulţimii A, iar $Fr(A)$ reprezintă frontiera mulţimii A, atunci:

$$Int(A) = \{x \in A : \exists V \in \mathcal{V}(x), V \subset A\}$$

$$Fr(A) = \{x \in \mathbf{R}^n : \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset \text{ şi } V \cap CA \neq \emptyset\}$$

Deoarece A este compactă (deci mărginită şi închisă) avem: $A = Int(A) \cup Fr(A)$.

Deoarece $x_* \in A$ deducem că $x_* \in Int(A)$ sau $x_* \in Fr(A)$.

Dacă $x_* \in Int(A)$, atunci x_* este punct de minim local pentru f, iar dacă $x_* \in Fr(A)$, presupunând că $Fr(A)$ poate fi definită prin ecuaţii carteziene, atunci x_* este punct de minim pentru f, condiţionat de aceste ecuaţii. O discuţie asemănătoare are loc pentru x^*.

Astfel, dacă se cer marginile unei funcţii de clasă C^1 pe o mulţime compactă A (punctele de extrem global) se aplică teorema lui Fermat pentru a determina punctele de extrem local situate în interiorul mulţimii compacte şi teorema lui Lagrange pentru cele care se află pe frontieră. Având asigurată existenţa punctelor x_*, x^* (prin teorema 3.1.5.4.) este suficient să calculăm valorile funcţiei f în toate punctele staţionare determinate şi să reţinem valorile extreme.

5.2. Tipuri de probleme şi metode de rezolvare.

Exerciţiul 5.2.1. Să se determine y'şi y'' dacă $y = y(x)$ este o funcţie definită implicit de ecuaţia $F(x, y) = 0$.

- Se studiază aplicabilitatea teoremei 5.1.1.1.
- Dacă sunt îndeplinite condiţiile teoremei se aplică formula

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}$$

- Se calculează y'' folosind regula de derivare a câtului şi regula de derivare a funcţiilor compuse.

Exerciţiul 5.2.2. Să se determine derivatele parţiale de ordinal întâi şi doi ale funcţiei $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia dată $F(x, y, z) = 0$.

- Se studiază aplicabilitatea teoremei 5.1.1.2.
- Dacă sunt îndeplinite condiţiile teoremei se aplică formulele

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))}$$

- Se calculează $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ folosind regula de derivare a câtului şi regula de derivare a funcţiilor compuse. Dacă F este de clasă C^2 atunci z este de clasă C^2 şi deci $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial z}$.

Exerciţiul 5.2.3. Să se determine derivatele parţiale de ordinul întâi şi doi ale funcţiilor $u = u(x, y)$ şi $v = v(x, y)$ definite implicit de sistemul

$$\begin{cases} F_1(x, y, u, v) = 0 \\ F_2(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

- Se studiază aplicabilitatea teoremei 5.1.1.3.
- Dacă teorema este aplicabilă se folosesc formulele:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, v)}(x, y, u(x, y), v(x, y))}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}(x, y, u(x, y), v(x, y))}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, v)}(x, y, u(x, y), v(x, y))}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}(x, y, u(x, y), v(x, y))}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, x)}(x, y, u(x, y), v(x, y))}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}(x, y, u(x, y), v(x, y))}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, y)}(x, y, u(x, y), v(x, y))}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}(x, y, u(x, y), v(x, y))}$$

- Pentru calculul derivatelor de ordinul al doilea se folosesc regulile de derivare a câtului şi a funcţiilor compuse
- Se procedează la fel dacă sunt mai multe ecuaţii
- Dacă se cer derivatele de ordin mai mare decât doi, se procedează la fel ca la cele de ordinul doi.

Exerciţiul 5.2.4. Să se determine extremele unei funcţii $y = y(x)$ definită implicit de ecuaţia dată $F(x, y) = 0$.

- Se studiază aplicabilitatea teoremei 5.1.1.1.
- Se pune condiţia necesară $y'(x) = 0$, care este echivalentă cu sistemul $\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0 \end{cases}$. Se obţin astfel punctele critice.

- Se află semnul lui y'' în fiecare punct critic şi se precizează ce fel de punct de extrem este.

Exerciţiul 5.2.5. Să se determine extremele unei funcţii $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia dată $F(x, y, z) = 0$.

- Se studiază aplicabilitatea teoremei 5.1.1.2.
- Se determină punctele critice rezolvând sistemul $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$ care este echivalent cu $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \neq 0 \end{cases}$
- Se reţin punctele critice (x_0, y_0) în care $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0$.

Acestea sunt puncte de extrem. Pentru acestea se determină semnul lui $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. Dacă $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ atunci (x_0, y_0) este punct de minim iar dacă $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, atunci (x_0, y_0) este punct de maxim.

Exercițiul 5.2.6. Să se demonstreze că transformarea dată T este un difeomorfism între două mulțimi A și B și să se determine derivatele parțiale ale componentelor transformării T^{-1}.

- Se determină jacobianul transformării T și se arată că acesta este nenul în orice punct din A..
- Se demonstrează că T este injectivă pe A și că $T(A) = B$
- Se inversează matricea jacobiană J_T și se identifică elementele lui $J_{T^{-1}}$ știind că $(J_T)^{-1} = J_{T^{-1}}$.

Exercițiul 5.2.7. Să se determine extremele funcției f condiționate de $g_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

- Se scrie funcția Lagrange $F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_m g_m$ cu $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ nedeterminați.
- Se calculează derivatele parțiale ale funcției F și se rezolvă

sistemul
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = 0, j = 1,2,\ldots,p \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_i} = 0, i = 1,2,\ldots,m \\ g_i = 0, i = 1,2,\ldots,m \end{cases}$$

obținându-se $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ și punctele staționare ale lui F.

- Se studiază matricea hessiană a funcției $\Phi(x_1, \ldots, x_p) = f(x_1, \ldots, x_p; y_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_p))$ în fiecare punct staționar și se decide dacă punctul staționar este punct de extrem (vezi și observația 5.1.3.1.).

Exercițiul 5.2.8. Să se determine $\sup f(A)$ și $\inf f(A)$, unde $A \subset \mathbf{R}^p$ este compactă, iar f este o funcție de clasă C^1 pe A, dată.

- Se determină punctele staționare ale lui f situate în $Int(A)$
- Se determină punctele staționare ale funcției Lagrange scrisă pentru f și ecuațiile carteziene ale frontierei lui A
- Se calculează valorile funcției f în toate punctele staționare determinate și se reține valorile extreme.

5.3. Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 5.3.1. Să se determine y' şi y'' dacă $y = y(x)$ este o funcţie definită implicit de ecuaţia $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0$.

Soluţie. Fie $F(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Evident F este de clasă C^1 pe $\mathbf{R}^2$.

$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 6x(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 + 1)$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 6y(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 + 1)$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $y = 0$ sau $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Prin urmare, ecuaţia $F(x, y) = 0$ defineşte pe y ca funcţie de x în vecinătatea oricărui punct (x_0, y_0) din mulţimea $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \neq 0, x^2 + y^2 - 1 \neq 0\}$ care verifică ecuaţia dată. Pentru orice x dintr-o vecinătate a punctului x_0 ecuaţia dată are soluţie unică $y(x)$. Obţinem, $y' = -\frac{x}{y}$.

Calculul direct arată că $y'' = -\frac{y - x \cdot y'}{y^2} = -\frac{y + x \cdot \frac{x}{y}}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}$.

Exerciţiul 5.3.2. Să se determine derivatele parţiale de ordinul întâi şi al doilea ale unei funcţii z definită implicit de ecuaţia: $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$

Soluţie. Fie $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y$. Evident, F este de clasă C^1 pe $\mathbf{R}^3$.

$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = -4y - z + 1$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 6z - y$. Ecuaţia $F(x, y, z) = 0$ defineşte pe z ca funcţie de variabilele x, y în vecinătatea oricărui punct (x_0, y_0, z_0) din mulţimea $D = \{(x, y, z): F(x, y, z) = 0, 6z - y \neq 0\}$ Pentru orice (x, y) dintr-o vecinătate a punctului (x_0, y_0) ecuaţia dată are soluţie unică $z(x, y)$. Calculul direct arată că:

$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{2x}{6z-y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{-4y-z+1}{6z-y}$. Derivând încă o dată, ţinând seama că $z = z(x, y)$ obţinem :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{2(6z-y)-2x\cdot 6\frac{\partial z}{\partial x}}{(6z-y)^2} = -\frac{2(6z-y)+2x\cdot 6\frac{2x}{6z-y}}{(6z-y)^2}$$

$$= -\frac{2(6z-y)^2+24x^2}{(6z-y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}(6z-y)-(-4y-z+1)\cdot 6\frac{\partial z}{\partial x}}{(6z-y)^2} = \frac{2x(25y-6)}{(6z-y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{\left(-4-\frac{\partial z}{\partial y}\right)(6z-y)-(-4y-z+1)\left(6\frac{\partial z}{\partial y}-1\right)}{(6z-y)^2} =$$

$$= \frac{150z^2-50yz+50y-100y^2-6}{(6z-y)^3}.$$

Printr-un calcul asemănător se arată că $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$. Această egalitate se poate deduce observând că F este de clasă C^2, de unde deducem că z este de clasă C^2 şi, prin urmare, derivatele mixte sunt egale.

Exerciţiul 5.3.3. Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1, -2)$ dacă z este funcţia definită implicit de ecuaţia $x^2 + 2y^2 + 3z^3 + xy - z - 9 = 0$ şi de condiţia $z(1, -2) = 1$.
Soluţie. Funcţia $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^3 + xy - z - 9$ şi punctul (1, -2, 1) satisfac condiţiile teoremei 5.1.1.2.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))} = -\frac{2x + y}{9z^2 - 1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))} = -\frac{4y + z}{9z^2 - 1}$$

pentru orice (x, y) dintr-o vecinătate a punctului $(1, -2)$.

Atunci $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{(9z^2 - 1) - (4y + z)\left(18z\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(9z^2 - 1)^2}$.

Deoarece $z(1, -2) = 1$, $\frac{\partial z}{\partial x}(1, -2) = 0$ rezultă $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -2) = -\frac{8}{8^2} = -\frac{1}{8}$.

Exercițiul 5.3.4. Să se determine derivatele parțiale de ordinul întâi și doi ale funcțiilor $u = u(x, y)$ și $v = v(x, y)$ definite implicit de sistemul

$$\begin{cases} u + v - x - y = 0 \\ xu + yv - 1 = 0 \end{cases}$$

Soluție. Fie $F_1(x, y, u, v) = u + v - x - y$ și $F_2(x, y, u, v) = xu + yv - 1$
Calcule simple arată că:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -1,\ \frac{\partial F_1}{\partial y} = -1,\ \frac{\partial F_1}{\partial u} = 1,\ \frac{\partial F_1}{\partial v} = 1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = u,\ \frac{\partial F_2}{\partial y} = v,\ \frac{\partial F_2}{\partial u} = x,\ \frac{\partial F_2}{\partial v} = y$$

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y - x$$

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,v)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ u & y \end{vmatrix} = -y-u$$

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,v)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ v & y \end{vmatrix} = -y-v$$

Rezultă că $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{-y-u}{y-x} = \frac{y+u}{y-x}$ şi $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y+v}{y-x}$ pentru $y - x \neq 0$.

Analog $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{u+x}{y-x}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{v+x}{y-x}$.

Derivatele de ordinul doi se calculează folosind regula de derivare a câtului şi ţinând seama că $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y+u}{y-x}\right) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(y-x)-(y+u)(-1)}{(y-x)^2} = \frac{2(y+u)}{(y-x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y+v}{y-x}\right) = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}(y-x)-(y+v)(-1)}{(y-x)^2} = \frac{-u-x+y+v}{(y-x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y+v}{y-x}\right) = \frac{\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)(y-x)-(y+v)}{(y-x)^2} = \frac{-2(x+v)}{(y-x)^2}$$

Analog se determină $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

Exerciţiul 5.3.5. Să se determine extremele unei funcţii implicite $y = y(x)$ definită de ecuaţia $x^3 + 8y^3 - 6xy = 0$.

Soluţie. Fie $F(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy$. Avem $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 6y$,

$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 24y^2 - 6x.$

Ecuația $F(x, y) = 0$ definește pe y ca funcție implicită de variabila x în vecinătatea oricărui punct (x_0, y_0) din mulțimea

$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x^3 + 8y^3 - 6xy = 0,\ 4y^2 - x \neq 0\}$.

Pentru orice x dintr-o vecinătate a punctului x_0 avem:

$$y'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 2y}{4y^2 - x}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ x^3 + 8y^3 - 6xy = 0 \\ 4y^2 - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \sqrt[3]{2} \\ y_0 = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2} \end{cases}$$

$$y''(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(2x - 2y'(x))(4y^2 - x) - (x^2 - 2y)(8y \cdot y'(x) - 1)}{(4y^2 - x)^2}$$

Deoarece $y'(x_0) = 0$, deducem că $y''(x_0) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2x_0}{(4y_0^2 - x_0)} = -1 < 0$ și deci $x_0 = \sqrt[3]{2}$ este punct de maxim pentru funcția $y = y(x)$ definită implicit de ecuația dată în vecinătatea acestui punct; valoarea maximă a lui y este $y(x_0) = y_0 = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

Exercițiul 5.3.6. Să se determine extremele unei funcții implicite $z = z(x, y)$ definită de ecuația

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$$

Soluție. Fie $F(x, y, z) = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72$.

Evident, în orice punct $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, avem: $\frac{\partial F}{\partial x} = 10x - 2y - 2z$,

$\frac{\partial F}{\partial y} = 10y - 2x - 2z$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 10z - 2x - 2y$. Deci F este de clasă C^1 pe $\mathbf{R}^3$.

Ecuația $F(x, y, z) = 0$ definește pe z ca funcție implicită de variabilele x și y în vecinătatea oricărui punct (x_0, y_0, z_0) din mulțimea
$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72=0,\ 10z-2x-2y \neq 0\}$.

Avem $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{y+z-5x}{5z-x-y}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{x+z-5y}{5z-x-y}$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z-5x=0 \\ x+z-5y=0 \\ 5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72=0 \\ 5z-x-y \neq 0 \end{cases}$$

adică $\begin{cases} x=y=1 \\ z=4 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x=y=-1 \\ z=-4 \end{cases}$.

Derivatele parțiale de ordinul doi ale lui z sunt :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}-5\right)(5z-x-y)-(y+z-5x)\left(5\frac{\partial z}{\partial x}-1\right)}{(5z-x-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y}-5\right)(5z-x-y)-(x+z-5y)\left(5\frac{\partial z}{\partial y}-1\right)}{(5z-x-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)(5z-x-y)-(x+z-5y)\left(5\frac{\partial z}{\partial x}-1\right)}{(5z-x-y)^2}$$

Ținând cont de teorema 5.1.1.2. ecuația dată definește în mod unic pe z ca funcție de x și y pe o vecinătate a punctului (1, 1, 4). Punctul (1, 1) este punct critic pentru această funcție și $z(1, 1) = 4$. Hessiana lui z în (1, 1) este

$$H_z(1, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = -\frac{5}{18} < 0$ şi $\Delta_2 = \frac{24}{18^2} > 0$. Prin urmare, (1, 1) este punct de maxim local pentru funcţia $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia dată în vecinătatea acestui punct, iar valoarea maximă este $z(1, 1) = 4$.

Analog, $(-1, -1)$ este punct critic pentru unica funcţie $z = z(x, y)$ obţinută aplicând teorema 5.1.1.2. ecuaţiei date şi punctului $(-1, -1)$. Hessiana acestei funcţii este

$$H_z(-1, -1) = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}$$

Deoarece $\Delta_1 = \frac{5}{18} > 0$ şi $\Delta_2 = \frac{24}{18^2} > 0$ rezultă că (-1, -1) este punct de minim pentru această funcţie. Valoarea minimă este $z(-1, -1) = -4$.

Exerciţiul 5.3.7. Demonstraţi că aplicaţia $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dată de

$$T(r, \theta, \varphi) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta)$$

este un difeomorfism de la mulţimea

$$A = \{(r, \theta, \varphi): r > 0, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$$

la mulţimea

$$B = \mathbf{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbf{R}^3: x \geq 0, z \in \mathbf{R}\}$$

şi determinaţi derivatele parţiale ale componentelor lui T^{-1}.

Observaţie: r, θ, φ se numesc coordonate sferice, iar T^{-1} realizează trecerea de la coordonatele carteziene x, y, z la coordonatele sferice în $\mathbf{R}^3$.

Soluţie. Pe componente, transformarea T se scrie astfel:

$$T:\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}, (r, \theta, \varphi) \in A$$

A şi B sunt mulţimi deschise, $B = T(A)$ şi restricţia lui T la mulţimea A este injectivă, ceea ce arată că $T : A \to B$ este o bijecţie. Matricea jacobiană a transformării este:

$$J(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Jacobianul transformării T în punctul curent este $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = r^2 \sin\theta \neq 0$

pentru orice $(r, \theta, \varphi) \in A$.

Rezultă că T este un difeomorfism de la A la B.

Pentru a calcula derivatele parţiale ale componentelor lui $T^{-1}: B \to A$ se calculează

$$[J_T(r, \theta, \varphi)]^{-1} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & \dfrac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & -\dfrac{\sin\theta}{r} \\ -\dfrac{\sin\varphi}{r\sin\theta} & \dfrac{\cos\varphi}{r\sin\theta} & 0 \end{pmatrix} = J_{T^{-1}}.$$

Identificând elementele celor două matrici egale obţinem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial x}(T(r,\theta,\varphi)) = \sin\theta\cos\varphi \\ \dfrac{\partial r}{\partial y}(T(r,\theta,\varphi)) = \sin\theta\sin\varphi \text{ , etc.} \\ \dfrac{\partial r}{\partial z}(T(r,\theta,\varphi)) = \cos\theta \end{cases}$$

Aceste derivate se mai pot obține derivând ecuațiile lui T și rezolvând sistemul obținut, dar acest lucru nu este posibil în general.

Aici de exemplu, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ deci $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$

$= \dfrac{r\sin\theta\cos\varphi}{r} = \sin\theta\cos\varphi$ etc.

Exercițiul 5.3.8. Să se determine extremele funcției $f(x, y, z) = x + y + z$ condiționate de $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = 1$.

Soluție. Fie $F(x, y, z) = x + y + z + \lambda\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}-1\right)$ cu $x \neq 0, y \neq 0,$

$z \neq 0, \lambda \in \mathbf{R}$. Rezolvând sistemul $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 1-\dfrac{\lambda}{x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 1-\dfrac{\lambda}{y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y) = 1-\dfrac{\lambda}{z^2} = 0 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}-1 = 0 \end{cases}$

se obțin soluțiile $\lambda_1 = 9, x_1 = y_1 = z_1 = 3$.

$\lambda_2 = 1, x_2 = y_2 = 1, z_2 = -1$
$\lambda_2 = 1, x_3 = z_3 = 1, y_3 = -1$
$\lambda_2 = 1, y_4 = z_4 = 1, x_4 = -1$

Fie $\Phi(x, y) = F(x, y, z(x, y))$ restricția lui F la mulțimea

$$M = \{(x, y, z): \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1\}$$

Atunci $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$ unde

$z = z(x, y)$ este definită implicit de restricția $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Derivând restricția în raport cu x (respectiv y) obținem $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z^2}{x^2}$

(respectiv $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z^2}{y^2}$).

Rezultă că $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 - \frac{z^2}{x^2}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1 - \frac{z^2}{y^2}$. Calculând derivatele parțiale de ordinul doi obținem:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{2z^2(z+x)}{x^4}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{2z^3}{x^2 y^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{2z^2(z+y)}{y^4}$$

Obținem $H_\Phi(3, 3) = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{pmatrix}$. Deoarece $\Delta_1 = \frac{4}{3} > 0$, $\Delta_2 = \frac{4}{3} > 0$ rezultă că (3, 3) este punct de minim pentru Φ, deci (3, 3, 3) este punct de minim condiționat pentru f.

$H_\Phi(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $H_\Phi(1, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ și $H_\Phi(-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

În aceste cazuri valorile proprii sunt soluții ale ecuației $\lambda^2 - 4 = 0$ adică $\lambda_{1,2} = \pm 2$, ceea ce arată că punctele staționare (1, 1, -1), (1, -1, 1) și

(-1, 1, 1) nu sunt puncte de extrem condiționat.

Exercițiul 5.3.9. Să se determine extremele funcției $f(x, y, z) = xyz$ condiționate de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ și $x + y + z = 0$.

Soluție: Fie $F(x, y, z) = xyz + \lambda_1 (x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2(x + y + z)$ cu $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$. Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Adunând primele trei ecuații și ținând cont de ultima, obținem $xy + xz + yz + 3\lambda_2 = 0$, iar din

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+xz+yz) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

rezultă $xy + xz + yz = -\dfrac{1}{2}$ deci $\lambda_2 = \dfrac{1}{6}$.

Scăzând primele două ecuații obținem $(y - x)(z - 2\lambda_1) = 0$. Dacă $y = x$ obținem punctele $\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$ și $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Considerând acum $z = 2\lambda_1$, înmulțind prima ecuație cu x, a doua cu y, a treia cu z și adunând rezultă $\begin{cases} 3xyz + 2\lambda_1 = 0 \\ z = 2\lambda_1 \end{cases}$.

Deci $3xyz + z = 0$ de unde $z = 0$ sau $3xy = -1$.

Se observă că $z = 0$ nu convine, iar din $\begin{cases} 3xy = -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ se obțin soluțiile $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right),$

$\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

λ_1 se calculează în fiecare caz din relația $3xyz + 2\lambda_1 = 0$. Fie acum $\Phi(x) = f(x, y(x), z(x))$, unde $y = y(x)$, $z = z(x)$ sunt explicitări locale ale sistemului de restricții $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$.

Rezultă că $\Phi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(x) + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot z'(x)$. Derivând membru cu membru restricțiile rezultă

$$\begin{cases} 2x + 2y \cdot y'(x) + 2z \cdot z'(x) = 0 \\ 1 + y'(x) + z'(x) = 0 \end{cases}$$

de unde $y'(x) = \frac{z - x}{y - z}$ și $z'(x) = \frac{x - y}{y - z}$.

Cum $\frac{\partial f}{\partial x} = yz$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xz$, $\frac{\partial f}{\partial z} = xy$ obținem $\Phi'(x) = yz - xy - xz + x^2$ și $\Phi''(x) = y'z + yz' - y - xy' - z - xz' + 2x = 2(2x - y - z)$. Deoarece

$\Phi''\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{6}{\sqrt{6}} > 0$ rezultă că $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ și $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ sunt puncte de minim condiționat. Valoarea minimă este $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$. Analog, deoarece $\Phi''\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{6}{\sqrt{6}} < 0$ deducem că punctele $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ și $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ sunt puncte de maxim condiționat, iar valoarea maximă este $\frac{1}{3\sqrt{6}}$. Punctele $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ și $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ trebuie analizate separat deoarece ele nu satisfac condiția $y \neq z$.

În vecinătatea fiecăruia dintre ele sistemul de restricții definește implicit pe x și pe y ca funcție de z.

Derivând în raport cu z sistemul de restricții obținem:

$$\begin{cases} 2x \cdot x'(z) + 2y \cdot y'(z) + 2z = 0 \\ x'(z) + y'(z) + 1 = 0 \end{cases}$$

adică $\begin{cases} x'(z) = \dfrac{y-z}{x-y} \\ y'(z) = \dfrac{z-x}{x-y} \end{cases}$, $x \neq y$.

Restricția funcției f la mulțimea M poate fi scrisă acum astfel: $\psi(z) = f(x(z), y(z), z)$.

Deci $\psi'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x'(z) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(z) + \frac{\partial f}{\partial z} = z^2 - yz - xz + xy$, $x \neq y$.

$\psi''(z) = 2z - y'z - y - x'y - x + x'y + xy' = 2(2z - x - y)$.

Se observă că $\psi''\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{6}{\sqrt{6}} > 0$, deci $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ este punct de minim condiționat, iar valoarea minimă este $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$, în timp ce $\psi''\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{6}{\sqrt{6}} < 0$, deci $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ este punct de maxim condiționat, iar valoarea maximă este $\frac{1}{3\sqrt{6}}$.

Exercițiul 5.3.10. Să se determine $\inf f(A)$ și $\sup f(A)$ dacă $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ este $f(x, y) = 5x^2 + 3xy + y^2$ și $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Soluție. Deoarece f este continuă, iar A este mulțime compactă, rezultă că marginile $\inf f(A)$ și $\sup f(A)$ există și sunt atinse.

Determinăm punctele staționare ale lui f.

Sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 10x + 3y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x + 2y = 0 \end{cases}$ are soluție unică $x = y = 0$.

Deci f are un singur punct staționar $(0, 0)$ și acesta se află în interiorul lui A. Funcția Lagrange este $F(x, y) = 5x^2 + 3xy + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.Din sistemul

$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 10x + 3y + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3x + 2y + 2\lambda x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ se obțin patru puncte staționare pe

frontiera lui A, anume $\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ şi $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

Calcule elementare arată că $f(0, 0) = 0, f\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{11}{2}$, $f\left(-\frac{3}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{11}{2}$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{2}$ şi $f\left(-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{2}$.

Rezultă că $\inf f(A) = f(0, 0) = 0$ şi

$$\sup f(A) = f\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = f\left(-\frac{3}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{11}{2}.$$

Exerciţiul 5.3.11. Să se determine punctele curbei $x^2 + xy + y^2 = 1$ care sunt cele mai depărtate de origine.

Soluţie. Trebuie să determinăm punctele de extrem ale funcţiei $f(x, y) = x^2 + y^2$ (pătratul distanţei de la (x, y) la $(0, 0)$) condiţionate de $x^2 + xy + y^2 = 1$.

Funcţia Lagrange este $F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + xy + y^2 - 1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda x + \lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda x + 2(1+\lambda)y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

Soluțiile sunt: $\lambda_1 = -2$ cu două puncte staționare (1, -1) și (-1, 1) și $\lambda_2 = -\frac{2}{3}$ cu două puncte staționare $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Aplicând metoda prezentată în exercițiul 5.3.9. se arată că (1, -1) și (-1, 1) sunt puncte de maxim condiționat.

Punctele $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ și $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ sunt puncte de minim condiționat. Punctele cele mai depărtate de origine, situate pe curba dată sunt (1, -1) și (-1, 1).

5.4. Exerciții propuse

Exercițiul 5.4.1. Să se determine y' și y'' dacă $y = y(x)$ este funcția definită implicit de ecuația:

a) $y^5 + x^2y^3 + x^2 + y = 0$ în vecinătatea punctului (0, 0)

b) $y^2 + x^5 - 1 = 0$ în vecinătatea punctului (0, 1)

Exercițiul 5.4.2. Să se determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}$ dacă $z = z(x, y)$ este funcția definită de ecuația $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0$ și punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{12}}\right)$.

Exercițiul 5.4.3. Să se determine y' și z' dacă $y = y(x)$ și $z = z(x)$ sunt definite implicit de sistemul $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 10z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2z^2 \end{cases}$ în vecinătatea punctului $\left(0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{18}}\right)$.

Exercițiul 5.4.4. Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, e - 1)$ dacă $z = z(x, y)$ este funcția definită implicit de ecuația $x + y + z = e^z$ și de condiția $z(0, e-1) = 1$.

Exercițiul 5.4.5. Fie $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție de clasă C^1 pe $\mathbf{R}$; ecuația $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz)$, $a, b, c \in \mathbf{R}$ definește implicit pe z ca funcție de x și y (local).

Să se arate că $(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$.

Exercițiul 5.4.6. Să se determine extremele unei funcții $y = y(x)$ definită implicit de ecuația:

a) $x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x - y + 6 = 0$

b) $x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$

R. a) $y(-4) = -2$ maxim local, $y(-3) = -1$ minim local

b) $y(0) = -1$ maxim local, $y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$ maxim local.

Exercițiul 5.4.7. Să se determine extremele unei funcții $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuația:

a) $z^3 + z + 20(x^2 + y^2) - 8(xy + x + y) = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$

c) $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$

R. a) Pentru funcția z_1 care satisface condiția $z_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = 1$ punctul $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ este punct de minim. Pentru funcția z_2 care satisface condiția $z_2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = -2$, punctul $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ este punct de maxim.

b) Pentru funcția z_1 care satisface condiția $z_1(1, -2) = -2$, punctul $(1, -2)$ este punct de minim. Pentru funcția z_2 care satisface condiția $z_2(1, -2) = 8$, punctul $(1, -2)$ este punct de maxim.

c) $(-1, 2)$ este punct de maxim pentru funcția z_1 care satisface condiția

$z_1(-1, 2) = -2$. $(-1, 2)$ este punct de minim pentru funcția z_2 care satisface condiția $z_2(-1, 2) = 1$.

Exercițiul 5.4.8. Se consideră aplicația $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, dată de

$$T(x, y) = (x + 2y, x^2 - y).$$

Să se precizeze două mulțimi deschise, nevide A, $B \subset \mathbf{R}^2$ astfel încât T să fie difeomorfism de la A la B și să se explicitezeze T^{-1}.

R. $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < -\frac{1}{4}, y > -x^2 - x - \frac{1}{8}\}$

$B = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : 1 + 8(u + v) > 0\}$

$$T^{-1}: \begin{cases} x = -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{1 + 8(u + v)}) \\ y = \frac{1}{8}(4u + 1 + \sqrt{1 + 8(u + v)}) \end{cases}$$

Exercițiul 5.4.9. Se consideră aplicația $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dată de $T(x, y, z) = (x, xy, xyz)$ și fie $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > 0, y > 0\}$. Să se arate că mulțimea $B = T(A)$ este deschisă, T este un difeomorfism de la A la B și să se explicitezeze T^{-1}.

R. $B = \{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3 : u > 0, v > 0\}$.

$$T^{-1}: x = u, y = \frac{y}{u}, z = \frac{w}{v}.$$

Exercițiul 5.4.10. Demonstrați că aplicația $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $T(r, t) = (r\cos t, r\sin t)$ este un difeomorfism de la mulțimea $A = \{(r, t) \in \mathbf{R}^2 : r > 0, 0 < t < 2\pi\}$ la mulțimea $B = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ și determinați derivatele parțiale ale componentelor lui T^{-1}.

(r și t se numesc coordonatele polare în plan, T realizează trecerea de la coordonatele polare la cele carteziene, iar T^{-1} trecerea de la coordonatele carteziene la cele polare)

R. $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos t$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \sin t$, $\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{\sin t}{r}$, $\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\cos t}{r}$.

Exercițiul 5.4.11. Demonstrați că aplicația $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dată de

$$T(r, \theta, \varphi) = (ar \sin\theta\cos\varphi, br \sin\theta\sin\varphi, cr\cos\theta)$$

cu $a, b, c \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ este un difeomorfism de la mulțimea

$A = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbf{R}^3 : r > 0,\ 0 < \theta < \pi,\ 0 < \varphi < 2\pi\}$
la mulțimea $B = \mathbf{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbf{R}^3 :\ x \geq 0,\ z \in \mathbf{R}\}$
și determinați derivatele parțiale ale componentelor lui T^{-1}.
(r, θ, φ se numesc coordonate polare generalizate, iar transformarea T realizează trecerea de la acestea la coordonatele carteziene)

Exercițiul 5.4.12. Să se determine extremele funcției $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ condiționate de $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{2}$.

R. (2, 2) punct de maxim ($\lambda = -1$), (-2, -2) punct de minim ($\lambda = 1$)

Exercițiul 5.4.13. Să se determine extremele funcției $f(x, y, z) = x + y + z$ condiționate de $x - y + z = 2$ și $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

R. $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ punct de maxim, $\lambda_1 = \dfrac{1}{3}$, $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$

(0, -2, 0) punct de minim, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$.

Exercițiul 5.4.14. Să se determine extremele funcției $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ condiționate de $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

R. (1, 1, 1) punct de minim, $\lambda = -\dfrac{3}{2}$.

Exercițiul 5.4.15. Să se determine extremele funcției $f(x, y) = xy$ condiționate de $x + y = 1$.

R. $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ punct de maxim, $\lambda = -\dfrac{1}{2}$.

Exercițiul 5.4.16. Să se determine extremele funcției $f(x, y) = x + 2y$ condiționate de $x^2 + y^2 = 5$.

R. (1, 2) punct de maxim, $\lambda = -\dfrac{1}{2}$, (-1, -2) punct de minim, $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

Exercițiul 5.4.17. Să se determine extremele funcției $f(x, y, z) = xy^2z^3$ condiționate de $x + y + z = 12$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

R. (2, 4, 6) punct de maxim

Exercițiul 5.4.18. Să se determine $\inf f(A)$ și $\sup f(A)$ dacă:

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

b) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\}$

Exercițiul 5.4.19. Să se determine $\inf f(A)$ și $\sup f(A)$ dacă:

a) $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - xy + z^4 - 2z^2$,
$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 8\}$

b) $f(x, y, z) = z - y - x$,
$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 2y^2 + z^2 - 1 = 0,\ 4x - 3z = 0\}$

Exercițiul 5.4.20. Pe curba $y = x^2$, $z = x^2$ din $\mathbf{R}^3$ să se determine punctul cel mai apropiat de $(0, 0, 1)$

Exercițiul 5.4.21. În planul $3x - 2z = 0$ să se determine punctul cu proprietatea că suma pătratelor distanțelor la punctele $(1, 1, 1)$ și $(2, 3, 4)$ este cea mai mică posibilă.

Exercițiul 5.4.22. Între toate triunghiurile de perimetru dat $2p$ să se determine acela a cărui arie este maximă.

R. triunghiul echilateral.

6. INTEGRALA SIMPLĂ. INTEGRALA SIMPLĂ CU PARAMETRU

6.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale

6.1.1. Metoda lui Darboux de a defini integrala simplă

Fie [a, b] un interval. Descompunem intervalul [a, b] într-un număr oarecare de segmente, de lungimi arbitrare, prin punctele:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{p-1} < x_p = b$$

Notăm cu d această descompunere şi o numim *diviziunea intervalului* [a, b].

Definiţia 6.1.1.1. Fie d o diviziune a intervalului [a, b] determinată de punctele $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{p-1} < x_p = b$.

Se numeşte *norma diviziunii* d numărul :

$$\| d \| = \max \{x_i - x_{i-1} ; i = 1, 2, \ldots, p\}$$

Dacă d' este o altă diviziune a intervalului [a, b], spunem că d' este mai fină decât d şi o notăm $d' > d$ dacă mulţimea punctelor care determină diviziunea d este inclusă în mulţimea punctelor care determină diviziunea d'.

Definiţia 6.1.1.2. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie mărginită pe [a, b] şi fie d o diviziune a intervalului [a, b] determinată de punctele :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{p-1} < x_p = b$$

Pentru fiecare i = 1, 2, ..., p, fie $m_i = \inf \{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ şi $M_i = \sup \{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Formăm sumele:

$$s(d) = \sum_{i=1}^{p} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$S(d) = \sum_{i=1}^{p} M_i (x_i - x_{i-1})$$

Suma s(d) se numeşte *suma inferioară Darboux*, iar S(d) se numeşte *suma superioară Darboux*, ataşată funcţiei f pe intervalul [a, b], corespunzătoare diviziunii *d* a intervalului.

Definiţia 6.1.1.3. Fie f : [a, b] → **R** o funcţie mărginită. Se numeşte *integrala inferioară Darboux* a funcţiei f pe intervalul [a, b] numărul:

$$\underline{I} = \sup \{ s(d) \mid d \in \mathcal{D} \}$$

Se numeşte *integrala superioară Darboux* a funcţiei f pe intervalul [a, b] numărul:

$$\overline{I} = \inf \{ S(d) \mid d \in \mathcal{D} \}$$

($\mathcal{D}$ este mulţimea tuturor diviziunilor posibile ale intervalului [a, b]).

Definiţia 6.1.1.4. Funcţia mărginită f : [a, b] → **R** se numeşte integrabilă pe [a, b], dacă integrala inferioară Darboux coincide cu integrala superioară Darboux pe acest interval. Valoarea lor comună se numeşte *integrala simplă* a funcţiei f pe intervalul [a, b], *în sens Darboux*. Se notează :

$$I = \underline{I} = \overline{I} = \int_a^b f(x)dx$$

Teorema 6.1.1.1. *(Criteriul lui Darboux de integrabilitate)*

Fie f : [a, b] → **R** o funcţie mărginită. Funcţia f este integrabilă pe [a, b], dacă şi numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta > 0$, încât pentru orice $d \in \mathcal{D}$ cu $\| d \| < \eta$ avem $S(d) - s(d) < \varepsilon$.

6.1.2. Metoda lui Riemann de a defini integrala simplă

Definiția 6.1.2.1. Fie f : [a, b] → **R** o funcție arbitrară și fie d o diviziune a intervalului [a, b] determinată de punctele $a= x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{p-1} < x_p= b$

Pentru fiecare i = 1, 2, ..., p alegem $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Notăm $\zeta=(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p)$.

Suma $\sigma(d, \zeta) = \sum_{i=1}^{p} f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$ se numește *sumă Riemann* sau sumă integrală a funcției f pe intervalul [a, b] corespunzătoare diviziunii d și alegerii punctelor intermediare ζ.

Definiția 6.1.2.2. Funcția f : [a, b] → **R** se numește *integrabilă în sens Riemann* pe [a, b], dacă există un număr real I cu proprietatea că pentru orice ε > 0 există η > 0, astfel încât oricare ar fi diviziunea d cu $\| d \| < \eta$ și oricare ar fi punctele intermediare $\zeta=(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p)$ să aibă loc inegalitatea $| \sigma(d, \zeta) - I | < \varepsilon$.

Prin urmare funcția f este integrabilă Riemann pe [a, b] dacă există în **R** $\lim_{\|d\| \to 0} \sigma(d, \zeta)$ și această limită nu depinde de alegerea ζ a punctelor intermediare.

Numărul real I, a cărui unicitate se poate deduce ușor, se numește *integrala în sens Riemann* a funcției f pe intervalul [a, b].

Teorema 6.1.2.1. Dacă funcția f : [a, b] → **R** este integrabilă în sens Riemann pe [a, b], atunci f este mărginită.

Prin urmare, dacă f este *nemărginită* pe [a, b], atunci f *nu este integrabilă* în sens Riemann pe [a, b].

Teorema 6.1.2.2. Fie f : [a, b] → **R** o funcție mărginită. Atunci funcția f este integrabilă în sens Darboux pe [a, b], dacă și numai dacă f este integrabilă în sens Riemann pe [a, b]. Integrala în sens Darboux a funcției f pe [a, b] coincide cu integrala în sens Riemann a lui f pe [a, b].

6.1.3. Clase de funcţii integrabile

Teorema 6.1.3.1. Fie f : [a, b] → **R** o funcţie continuă pe [a, b]. Atunci f este integrabilă pe [a, b].

Teorema 6.1.3.2. Fie f : [a, b] → **R** o funcţie monotonă. Atunci f este integrabilă pe [a, b].

Teorema 6.1.3.3. Fie f : [a, b] → **R** o funcţie mărginită care are un număr finit de puncte de discontinuitate. Atunci f este integrabilă pe [a, b].

6.1.4. Proprietăţi ale funcţiilor integrabile şi ale integralei

Teorema 6.1.4.1. Fie f : [a, b] → **R** o funcţie integrabilă pe [a, b]. Atunci f este integrabilă pe orice interval [c, d] ⊂ [a, b].

Teorema 6.1.4.2. *(Proprietatea de aditivitate a integralei faţă de interval).*
Fie f : [a, b] → **R** o funcţie arbitrară şi c∈ (a, b). Atunci f este integrabilă pe [a, b], dacă şi numai dacă f este integrabilă pe [a,c] şi pe [c,b].
În acest caz avem $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

Teorema 6.1.4.3. *(Proprietatea de liniaritate a integralei faţă de funcţie).*
Fie f, g : [a, b] → **R** două funcţii integrabile pe [a, b], α, β∈ **R** arbitrare. Atunci funcţia αf + βg este integrabilă pe [a, b] şi

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Teorema 6.1.4.4. Fie f, g : [a, b] → **R** două funcţii integrabile pe [a, b]. Atunci funcţia f •g este integrabilă pe [a, b].

Teorema 6.1.4.5. *(Proprietatea de monotonie a integralei)*

Fie f, g : [a, b] → **R** două funcții integrabile pe [a, b], astfel încât f(x) ≤ g(x) pentru orice x∈ [a, b]. Atunci avem :

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx .$$

În particular, dacă f(x) ≥ 0, pentru orice x∈ [a, b], atunci

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0 .$$

Teorema 6.1.4.6. Fie f : [a, b] → **R** o funcție integrabilă pe [a, b]. Atunci | f | este o funcție integrabilă și avem :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx .$$

Observația 6.1.4.1. Există funcții care nu sunt integrabile, dar au modulul integrabil : funcția f : [0, 1] → **R** definită prin f(x) = 1, dacă x∈ [0, 1] ∩ **Q** și f(x) = -1 , dacă x∈ [0, 1] \ **Q** nu este integrabilă pe [0, 1], dar, evident, | f | este funcție integrabilă pe [0, 1].

Teorema 6.1.4.7. *(Teorema de medie)*

Dacă f : [a, b] → **R** este o funcție integrabilă pe [a, b], a < b, m = {f(x); x∈ [a, b]}, M = sup {f(x); x∈ [a, b]} atunci există μ ∈ [m, M] astfel încât $\int_a^b f(x)dx = \mu\,(b - a)$.

Dacă f este continuă pe [a, b], atunci există ζ ∈ [a, b] astfel încât μ = f(ζ) și formula de medie devine :

$$\int_a^b f(x)dx = f(\zeta)\,(b - a)$$

6.1.5. Metode de calcul al integralei simple

Metodele de calcul exact al integralei simple au la bază două teoreme fundamentale ale calculului integral, care stabilesc legătura dintre integrala simplă şi primitiva unei funcţii.

Definiţia 6.1.5.1. Dacă $J \subset \mathbf{R}$ este un interval, funcţia $f : J \to \mathbf{R}$ *admite primitivă* pe J, dacă există o funcţie $F : J \to \mathbf{R}$, derivabilă pe J, încât $F' = f$. Funcţia F se numeşte, în acest caz, *primitivă* a funcţiei f.

Observaţia 6.1.5.1. O condiţie necesară ca funcţia f să admită primitivă pe J este ca f să aibă proprietatea lui Darboux. Prin urmare, dacă f *nu are proprietatea lui Darboux* pe J, atunci f *nu admite primitivă* pe J. Mai general, o funcţie care are un punct de discontinuitate de speţa întâi pe J, nu admite primitivă pe J.

Teorema 6.1.5.1. Fie $f : J \to \mathbf{R}$ o funcţie integrabilă pe orice interval compact inclus în J; fie $a \in J$ fixat şi fie funcţia $F : J \to \mathbf{R}$ definită prin

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Atunci :

1) Funcţia F este continuă pe J;
2) Funcţia F este derivabilă în orice punct $x_0 \in J$ în care funcţia f este continuă şi $F'(x_0) = f(x_0)$

Prin urmare, dacă f este *continuă* pe J, atunci F este *o primitivă* pentru f pe intervalul J.

Teorema 6.1.5.2. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie integrabilă care admite primitive. Atunci, oricare ar fi F, o primitivă a lui f pe intervalul [a, b], avem:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$ (formula Leibnitz-Newton)

Observaţia 6.1.5.2. Formula Leibnitz-Newton reduce calculul integralei funcţiei f pe intervalul [a, b] la determinarea unei primitive F a funcţiei f pe acest interval. Cum pentru o clasă destul de largă de funcţii se poate determina primitive, rezultă că pentru o clasă destul de largă de funcţii putem calcula exact integrala.

Cu ajutorul formulei Leibnitz-Newton se pot demonstra formula de integrare prin părţi şi formula schimbării de variabilă care, în anumite condiţii, reduce calculul unor integrale la calculul altora, mai uşor de calculat.

Teorema 6.1.5.3. Fie f, g : [a, b] → **R** două funcţii derivabile cu derivate integrabile. Atunci :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

(formula de integrare prin părţi)

Observaţia 6.1.5.3. Formula se aplică în cazul când integrala $\int_a^b f'(x)g(x)dx$ este mai uşor de calculat decât $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ iar f' şi g se deduc şi ele uşor.

Teorema 6.1.5.4. Fie f : [a, b] → **R** o funcţie continuă, φ : [α, β] →[a, b] o funcţie derivabilă, cu φ' integrabilă pe [α, β], în particular, φ de clasă C^1 pe [α, β]. Atunci :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt$$

(prima formulă de schimbare de variabilă)

Observaţia 6.1.5.4. Prima formulă de schimbare de variabilă reduce calculul integralei funcţiei (f ∘ φ)• φ' la calculul integralei funcţiei f, în cazul când acesta din urmă este mai uşor. Funcţia φ realizează "schimbarea de la variabila x la variabila t ". În mod practic, dacă avem de calculat

$\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ se caută mai întâi f şi φ care să satisfacă condiţiile teoremei şi astfel încât g(x) = f(φ(x))• φ'(x), apoi se aplică direct formula de mai sus. În unele probleme însă, funcţia g de integrat poate fi pusă sub forma g(x) = f(φ(x)).

În acest caz, evident că formula schimbării de variabilă de mai sus nu poate fi aplicată direct. Totuşi, în anumite condiţii mai restrictive, impuse funcţiei φ, se poate aplica indirect această formulă. Mai precis, are loc următoarea:

Teorema 6.1.5.5. Fie f : [a, b] ∈ **R** o funcţie continuă, φ : [α, β] →[a, b] o funcţie bijectivă, astfel încât inversa sa φ^{-1} : [a, b] →[α, β] este derivabilă, iar derivata $(\varphi^{-1})'$ este integrabilă pe [a, b]; toate aceste condiţii sunt îndeplinite, dacă φ este de clasă C^1 pe [α, β] şi φ'(x) ≠ 0, pentru orice x∈ [α, β]. Atunci:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\cdot(\varphi^{-1})'(t)dt$$

(a doua formulă de schimbare de variabilă)

Observaţia 6.1.5.5. Nu se poate da o indicaţie general valabilă, totuşi, pentru anumite tipuri de funcţii se pot da metode standard de alegere a funcţiei φ.

Exemplul 6.1.5.1. Dacă $g(x) = R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^p}\right)$, x∈ [α, β], unde R(u, v) este o funcţie raţională, atunci alegând $\varphi(x) = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, integrala $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ se reduce la o integrală dintr-o funcţie raţională.

Exemplul 6.1.5.2. Dacă $g(x) = R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$, $x \in [\alpha, \beta]$, $a \neq 0$, unde R(u, v) este o funcție rațională, atunci integrala $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ se poate reduce la o integrală dintr-o funcție rațională, folosind *substituțiile lui Euler*. Se deosebesc trei cazuri:

a) dacă $a > 0$, se recomandă schimbarea determinată de
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \cdot x + t$$

b) dacă $c > 0$, se recomandă schimbarea determinată de
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c}$$

c) dacă $b^2 - 4ac > 0$, se recomandă schimbarea determinată de
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$$

unde x_1 este una dintre rădăcinile trinomului $ax^2 + bx + c$ (se presupune, evident, că $ax^2 + bx + c \geq 0$ pe intervalul $[\alpha, \beta]$).

Exemplul 6.1.5.3. Dacă $g(x) = R(\sin x, \cos x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, unde R(u, v) este o funcție rațională, folosind funcția $\varphi(x) = tg\frac{x}{2}$, integrala $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ se reduce la o integrală dintr-o funcție rațională.

Exemplul 6.1.5.4. Dacă $g(x) = x^m(ax^n + b)^p$, $x \in [\alpha, \beta]$, unde $a, b \in \mathbf{R}$, $m, n, p \in \mathbf{Q}$, $ax^n + b \geq 0$ pentru orice $x \in [\alpha, \beta]$, atunci $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ se numește *integrală binomă* (Cebîșev) și se poate calcula elementar numai în următoarele trei cazuri:

a) $p \in \mathbf{Z}$; se folosește funcția $\varphi(x) = x^{1/r}$, unde r este numitorul comun al numerelor raționale m și n.

b) $p \notin \mathbf{Z}$, dar $\frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$; se folosește funcția $\varphi(x) = (ax^n + b)^{1/s}$, unde s este numitorul lui p.

c) $p \notin \mathbf{Z}$, $\frac{m+1}{n} \notin \mathbf{Z}$ dar $p + \frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$; în acest caz se foloseşte funcţia $\varphi(x)=(a + bx^{-n})^{1/s}$, unde s este, de asemenea, numitorul lui p. În toate cele trei cazuri, integrala binomă se transformă într-o integrală dintr-o funcţie raţională.

Observaţia 6.1.5.6. Dacă în calculul integralei $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ alegem pentru schimbarea de variabilă o funcţie φ astfel încât $g(x) = f(\varphi(x))$, dar φ nu este inversabilă pe $[\alpha, \beta]$, atunci se descompune intervalul $[\alpha, \beta]$ într-un număr finit de subintervale, încât pe fiecare subinterval funcţia φ să aibă o restricţie inversabilă, se aplică a doua formulă de schimbare de variabilă pe fiecare subinterval, apoi se foloseşte proprietatea de aditivitate a integralei faţă de interval.

Observaţia 6.1.5.7. Metodele de calcul exact expuse mai sus presupun cunoscute primitivele anumitor funcţii. Există însă cazuri simple, când există primitivele, dar acestea nu pot fi exprimate cu ajutorul funcţiilor elementare: $\frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}, \frac{e^x}{x}, \frac{1}{\ln x}, e^{x^2}$, $\sin x^2$, $\cos x^2$ etc. au primitive pe domeniul lor de definiţie (fiind continue), care însă nu pot fi determinate prin nici una din metodele elementare. De aceea sunt prezentate în continuare şi câteva *metode de calcul aproximativ al integralei simple.* Ideea acestor metode este sugerată de însăşi definiţia integralei : dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este integrabilă, considerând un şir arbitrar $(d_n)_{n \in N}$ de diviziuni ale intervalului [a, b] cu $\lim_{n \to \infty} \|d_n\| = 0$ şi fixând pentru fiecare diviziune d_n o alegere a punctelor intermediare ζ^n, atunci şirul numeric $(\sigma_n)_{n \in N}$, unde $\sigma_n = \sigma(d_n, \zeta^n)$, converge la $\int_a^b f(x)dx$. Prin urmare, pentru a aproxima integrala, cu o anumită eroare, este suficient, să calculăm un

anumit termen al şirului $(\sigma_n)_{n\in N}$. Particularizând modul de alegere al diviziunilor şi al punctelor intermediare, se obţin diferite metode de calcul aproximativ al integralelor.

Teorema 6.1.5.6. *(Metoda dreptunghiurilor)*

Fie f : [a, b] → **R** o funcţie integrabilă. Considerăm o diviziune d a intervalului [a, b], determinată de punctele :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{p-1} < x_p = b$$

cu $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$, i = 1, 2, ..., n, iar ca puncte intermediare alegem $\zeta_i = x_{i-1}$ sau $\zeta_i^* = x_i$, i = 1, 2, ..., n. Atunci:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sigma_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$

sau

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sigma_n^* = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Dacă funcţia f este derivabilă, cu derivata mărginită pe [a, b], atunci

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sigma_n\right| \le A \cdot \frac{(b-a)^2}{n}$$

unde A = sup {| f '(x) |; x∈ [a, b]}.

Observaţia 6.1.5.8. Dacă funcţia f este crescătoare pe [a, b], atunci σ_n aproximează integrala prin lipsă, iar σ_n^* prin adaos, de aceea media lor aritmetică constituie o aproximare mai bună.

Teorema 6.1.5.7. *(Metoda trapezelor)*

În condiţiile teoremei precedente, avem:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\sigma_n + \sigma_n^*}{2} = \frac{b-a}{2n}[f(a) + 2f(x_1) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(b)]$$

Dacă funcția f are derivata de ordinul doi mărginită pe [a,b], atunci

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{\sigma_n + \sigma_n^*}{2} \right| \leq B \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

unde B = sup {| f''(x) |; x∈ [a, b]}.

Teorema 6.1.5.8. *(Metoda tangentelor)*

În condițiile teoremei 6.1.5.6., luând n=2m, avem:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{m} \sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1})$$

Teorema 6.1.5.9. *(Metoda lui Simpson)*

În condițiile teoremei 6.1.5.6., luând n = 2m, t_n valoarea aproximativă a integralei obținută prin metoda trapezelor, T_n cea obținută prin metoda tangentelor avem :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2t_n + T_n}{3} = \frac{b-a}{6m}[f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) +$$

$$... + 2f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(b)]$$

Dacă f are derivată de ordinul patru mărginită pe [a, b], atunci

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{2t_n + T_n}{3} \right| \leq M \cdot \frac{(b-a)^5}{2880m^4},$$

unde M = sup {| $f^{(4)}(x)$ |; x∈ [a, b]}.

Observația 6.1.5.9. O altă metodă de aproximare a integralei simple este metoda de integrare prin dezvoltarea în serie de puteri. Această metodă, furnizată de teorema de integrare termen cu termen a unei serii de puteri constă în dezvoltarea funcției f în serie de puteri, integrarea termen cu

termen a acestei serii, obținerea integralei $\int_a^b f(x)dx$ ca sumă a unei serii numerice și aproximarea acesteia cu o sumă parțială convenabilă .

6.1.6. Aplicații ale integralei simple

Fie f : [a, b] → $\mathbf{R}$ o funcție continuă pe [a, b]. Atunci *aria domeniului* D⊂$\mathbf{R}^2$, mărginit de graficul funcției f, axa ox și dreptele de ecuații x = a și x = b, este dată de

$$a(D) = \int_a^b |f(x)|dx \qquad (6.1.6.1)$$

Volumul corpului Ω ⊂$\mathbf{R}^3$ obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox este dat de :

$$v(\Omega) = \pi \int_a^b f^2(x)dx \qquad (6.1.6.2)$$

Dacă funcția f are derivate continuă pe [a, b], atunci *lungimea arcului de curbă* (γ) ⊂$\mathbf{R}^2$, care are ecuația y = f(x), x∈ [a, b] este dată de :

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx \qquad (6.1.6.3)$$

6.1.7 Integrala simplă cu parametru.

Definiția 6.1.7.1. Fie A⊂$\mathbf{R}$, J = [a, b] ⊂$\mathbf{R}$ și f : A x J→ $\mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea că pentru fiecare x∈ A, funcția t → f(x, t) este integrabilă pe [a, b]. Funcția F : A → $\mathbf{R}$ definită prin F(x) = $\int_a^b f(x,t)dt$ se numește *integrală cu parametru* (cu "limite fixe". Parametrul este x).

Definiţia 6.1.7.2. Fie $\varphi, \psi : A \to [a, b]$ două funcţii, astfel încât $\varphi(x) \leq \psi(x)$, pentru orice $x \in A$, iar pentru orice $x \in A$ funcţia $t \to f(x, t)$ este integrabilă pe intervalul $[\varphi(x), \psi(x)]$. Funcţia $\widetilde{F} : A \to \mathbf{R}$ definită prin $\widetilde{F}(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt$ se numeşte, de asemenea, *integrală cu parametru* (cu "limite variabile". Parametrul este x).

Teorema 6.1.7.1. Fie $A \subset \mathbf{R}$ un interval nu neapărat compact, $J = [a, b] \subset \mathbf{R}$. Dacă funcţia $f : A \times J \to \mathbf{R}$ este continuă pe $A \times J$, atunci funcţia $F : A \to \mathbf{R}$, $F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ este continuă pe A.

Teorema 6.1.7.2. Fie $A \subset \mathbf{R}$ un interval nu neapărat compact, $J = [a, b] \subset \mathbf{R}$. Fie $\varphi, \psi : A \to [a, b]$ două funcţii continue pe A şi $f : A \times J \to \mathbf{R}$ continuă pe $A \times J$. Atunci funcţia $\widetilde{F} : A \to \mathbf{R}$ $\widetilde{F}(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt$ este continuă pe A.

Teorema 6.1.7.3. Fie $A \subset \mathbf{R}$, A interval arbitrar, $J = [a, b] \subset \mathbf{R}$ şi funcţia $f : A \times J \to \mathbf{R}$. Dacă f este continuă pe $A \times J$, are derivată parţială în raport cu x, continuă pe $A \times J$, atunci funcţia $F: A \to \mathbf{R}$, $F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ este derivabilă pe A şi, pentru orice $x \in A$, avem:

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

În plus, funcţia F' este continuă pe A.

Teorema 6.1.7.4. Fie $A \subset \mathbf{R}$, A interval arbitrar, $J = [a, b] \subset \mathbf{R}$.
Fie $\varphi, \psi : A \to J$ două funcții arbitrare de clasă C^1 pe A, $f : A \times J \to \mathbf{R}$ o funcție continuă pe A x J. Atunci funcția $\widetilde{F} : A \to \mathbf{R}$

$\widetilde{F}(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt$ este derivabilă pe A și pentru orice $x \in A$, avem:

$$\widetilde{F}'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt + f(x,\psi(x)) \cdot \psi'(x) - f(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

Teorema 6.1.7.5. Fie $A \subset \mathbf{R}$, A interval arbitrar, $J = [a, b] \subset \mathbf{R}$. Fie $f : A \times J \to \mathbf{R}$ o funcție continuă pe A x J. Atunci funcția ,

$F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ este integrabilă pe orice interval compact $[\alpha, \beta] \subset A$ și are loc egalitatea

$$\int_\alpha^\beta F(x)dx = \int_a^b \left[\int_\alpha^\beta f(x,t)dx \right] dt$$

Observația 6.1.7.1. Egalitatea din concluzia teoremei precedente se poate scrie:

$$\int_\alpha^\beta \left[\int_a^b f(x,t)dt \right] dx = \int_a^b \left[\int_\alpha^\beta f(x,t)dx \right] dt$$

Această formulă arată că, în condițiile teoremei, putem schimba ordinea de integrare.

Observația 6.1.7.2. Pentru integralele cu parametru cu limite variabile nu putem da în mod direct o asemenea formulă. Putem însă, prin schimbarea de variabilă:

$$t = \varphi(x) + z[\psi(x) - \varphi(x)],$$

să reducem integrala cu limite variabile la o integrală cu limite fixe, şi apoi să schimbăm ordinea de integrare. Prin urmare, dacă $\varphi, \psi : A \to [a, b]$ sunt continuc pe A, iar $f : A \times J \to \mathbf{R}$ este continuă pe A x J, atunci funcţia

$\widetilde{F} : A \to \mathbf{R}$ $\widetilde{F}(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt$ este integrabilă pe orice interval compact $[\alpha, \beta] \subset A$ şi avem:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \widetilde{F}(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt \right] dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{0}^{1} g(x,z)dz \right] dx = \int_{0}^{1} \left[\int_{\alpha}^{\beta} g(x,z)dx \right] dz$$

unde g este funcţia $g : A \times [0, 1] \to \mathbf{R}$ definită prin:

$$g(x, z) = f(x, \varphi(x) + z[\psi(x) - \varphi(x)]) \cdot [\psi(x) - \varphi(x)],$$

care este evident continuă pe A x [0, 1] , ceea ce justifică ultima egalitate.

6.2. Tipuri de probleme şi metode de rezolvare

Exerciţiul 6.2.1. Să se demonstreze că funcţia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este integrabilă pe [a, b].

- se arată că f este monotonă

sau

- se arată ca f are un număr finit de puncte de discontinuitate

sau

- se arată că f este continuă

sau

- se utilizează (mai rar) definiţia sau criteriul lui Darboux.

Exerciţiul 6.2.2. Să se demonstreze că funcţia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ nu este integrabilă pe [a, b].

- se arată că f nu este mărginită

sau

- se arată că există două şiruri de sume Riemann cu limite diferite

sau

- se arată (mai rar) că f nu satisface condiţia din criteriul lui Darboux

Exerciţiul 6.2.3. Folosind integrala simplă, să se calculeze limita şirului $a_n = \ldots$, $n \in \mathbf{N}^*$.

- se precizează o funcţie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, o diviziune d_n a intervalului [a, b] şi un sistem ζ de puncte intermediare astfel încât $a_n = \sigma_n(d_n, \zeta)$ este suma Riemann asociată, de obicei d_n se consideră astfel încât:

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

iar sistemul ζ se obţine punând $\zeta_i = x_{i-1}$ sau $\zeta_i = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$

- se demonstrează că funcţia f este integrabiă pe [a, b] (arătându-se că este monotonă, sau că este continuă)
- utilizând noţiunea de funcţie integrabilă, se deduce că
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \int_a^b f(x)dx$
- se calculează $\int_a^b f(x)dx$

Exerciţiul 6.2.4. Să se demonstreze că $f : I \to \mathbf{R}$ are primitive.

- se arată că f este continuă;
- se construieşte o funcţie $F : I \to \mathbf{R}$ pentru care se arată că

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I$$

Exercițiul 6.2.5. Să se demonstreze că $f: I \to \mathbf{R}$ nu are primitive.

- se arată că f nu are proprietatea lui Darboux

sau

- se presupune că f are primitive și se găsește forma generală F(x, c); utilizând funcții elementare, pe subintervale și continuitatea primitivelor.
- se arată că există $x_0 \in I$ încât F nu este derivabilă în x_0 sau $F'(x_0) \neq f(x_0)$

Exercițiul 6.2.6. Să se demonstreze că funcția $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ este integrabilă pe [a, b], dar nu admite primitive pe [a, b].

- se arată că f este monotonă și că nu are proprietatea lui Darboux

Exercițiul 6.2.7. Să se demonstreze că $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ are primitive pe [a, b] dar nu este integrabilă pe [a, b].

- se construiește o funcție $F: [a, b] \to \mathbf{R}$ astfel încât
$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$
- se arată că f nu este mărginită

Exercițiul 6.2.8. Să se demonstreze că $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

- se arată că $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$ și se folosește proprietatea de monotonie a integralei

Exercițiul 6.2.9. Să se demonstreze că $A \leq \int_a^b f(x)dx \leq B$.

- se determină $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ și $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$

- se ţine seama de inegalitatea evidentă:

$$m\,(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\,(b - a)$$

- se arată că $A \leq m\,(b - a)$ şi că $M\,(b - a) \leq B$

Exerciţiul 6.2.10. Să se calculeze $\int_a^b f(x)dx$.

- se determină o primitivă a funcţiei f pe intervalul [a, b].
- se aplică formula Leibnitz-Newton : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

sau

- se aplică formula de integrare prin părţi (o dată sau de mai multe ori) până când se ajunge la o integrală uşor de calculat (cu formula Leibnitz) sau la o integrală simplă, situaţie în care se găseşte valoarea integralei ca soluţie a unei ecuaţii algebrice simple
- se utilizează o schimbare de variabilă convenabilă, încât integrala obţinută să poată fi calculată direct cu formula Leibnitz-Newton
- se utilizează o schimbare de variabilă convenabilă încât pentru integrala obţinută să se poată aplica în continuare formula de integrare prin părţi.

Exerciţiul 6.2.11. Să se aproximeze $\int_a^b f(x)dx$ cu o eroare dată.

- se alege una dintre metodele de aproximare: metoda dreptunghiurilor, trapezelor, tangentelor sau metoda lui Simpson
  1. se determină numărul n utilizând formula de evaluare a erorii făcute cu metoda respectivă
  2. se aplică formula de aproximare cu n determinat anterior

sau

- se utilizează metoda de integrare prin dezvoltarea în serie:
  1. se dezvoltă funcția în serie de puteri
  2. se integrează termen cu termen seria obținută
  3. se obține $\int_a^b f(x)dx$ ca sumă a unei serii numerice
  4. se determină o valoare aproximativă a acesteia calculând o sumă parțială cu n convenabil ales

Exercițiul 6.2.12. Să se determine aria domeniului $D \subset \mathbf{R}$, mărginit de graficul funcției f : [a, b] $\rightarrow \mathbf{R}$, f(x) = ... axa Ox şi dreptele x = a, x = b.

- se scrie formula 6.1.6.1.
- se explicitează | f(x) |, x$\in$ [a, b]
- se scrie integrala ca o sumă de integrale
- se calculează fiecare integrală în parte şi se adună rezultatele

Exercițiul 6.2.13. Să se determine volumul corpului $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ obținut prin rotirea graficului funcției f : [a, b] $\rightarrow \mathbf{R}$, f(x) = ..., în jurul axei Ox.

- se scrie formula 6.1.6.2.
- se calculează integrala obținută

Exercițiul 6.2.14. Să se determine lungimea graficului funcției
f : [a, b] $\rightarrow \mathbf{R}$, f(x) = ...

- se scrie formula 6.1.6.3.
- se calculează integrala obținută.

Exercițiul 6.2.15. Fie A $\subset \mathbf{R}$, un interval arbitrar, J = [a, b] $\subset \mathbf{R}$ şi
f : A x J$\rightarrow \mathbf{R}$ o funcție dată.

Să se arate că funcția F : A$\rightarrow \mathbf{R}$, F(x) = $\int_a^b f(x,t)dt$ este continuă pe A.

- se arată că f este continuă pe A x J.

Exercițiul 6.2.16. Fie $A \subset \mathbf{R}$, un interval arbitrar, $J = [a, b] \subset \mathbf{R}$ $\varphi, \psi : A \to [a, b]$ două funcții şi f o funcție definită pe produsul cartezian A x J. Să se arate că funcția $\widetilde{F} : A \to \mathbf{R}$, $\widetilde{F}(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt$ este continuă pe A.

- se arată că funcțiile φ, ψ sunt continue pe A, iar funcția f este continuă pe A x J.

Exerviţiul 6.2.17. Fie $A \subset \mathbf{R}$, , J = [a, b], f : A x J $\to \mathbf{R}$, şi F : A $\to \mathbf{R}$, $F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$. Să se arate că funcția F este derivabilă pe A şi să se determine derivatele ei.

- se arată că f este continuă pe A x J;
- se calculează $\frac{\partial f}{\partial x}$;
- se arată că $\frac{\partial f}{\partial x}$ este continuă pe A x J;
- se aplică formula din teorema 6.1.7.3

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt \text{, pentru orice } x \in A.$$

Exercițiul 6.2.18. Fie $A \subset \mathbf{R}$, , J = [a, b] $\subset \mathbf{R}$, $\varphi, \psi : A \to [a, b]$ două funcții şi f : A x J $\to \mathbf{R}$, o funcție dată. Să se arate că funcția $\widetilde{F} : A \to \mathbf{R}$, $\widetilde{F}(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt$ este derivabilă pe A şi să se determine derivata ei.

- se calculează φ' şi ψ' şi se arată că sunt continue pe A;
- se arată că f este continuă pe A x J;

- se calculează $\frac{\partial f}{\partial x}$;
- se arată că $\frac{\partial f}{\partial x}$ este continuă pe A x J;
- se aplică formula din teorema 6.1.7.4:

$$\widetilde{F}\,'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt + f(x,\psi(x))\cdot\psi'(x) - f(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

pentru orice x∈ A.

Exercițiul 6.2.19. Să se calculeze $\int_a^b f(x,t)dt$, x∈ A.

- se notează F(x) = $\int_a^b f(x,t)dt$, x∈ A;
- se arată că f este continuă pe A x [a, b];
- se calculează $\frac{\partial f}{\partial x}$;
- se arată că $\frac{\partial f}{\partial x}$ este continuă pe A x [a, b];
- se calculează integrala $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$, pentru orice x∈ A şi se obține astfel F '(x) pentru x∈ A (ca în exercițiul 6.2.17);
- se determină primitivele lui F ';
- se alege funcția F dintre primitivele lui F ', determinând constanta corespunzătoare unei condiții convenabil alese (condiția poate fi de forma $F(x_0) = y_0$, unde x_0 este ales astfel încât y_0 să fie uşor de

determinat sau $\lim_{x \to \alpha} F(x) = l$, unde α este una din extremitățile intervalului A).

Exercițiul 6.2.20. Utilizând integralele cu parametru, să se calculeze $\int_a^b g(t)dt$.

- se caută o funcție f(x, t), $x \in A$, $t \in [a, b]$ astfel încât $g(t) = f(x_0, t)$, $x_0 \in A$ cunoscut;
- se determină $F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$, ca în exercițiul 6.2.19. şi apoi se înlocuieşte x cu x_0, obținându-se valoarea integralei cerute.

sau

- se încearcă scrierea lui g(t) sub forma $g(t) = \int_\alpha^\beta f(x,t)dt$, unde f este o funcție continuă pe $[\alpha, \beta] \times [a, b]$;
- se foloseşte schimbarea ordinii de integrare:

$$\int_a^b g(t)dt = \int_a^b \left[\int_\alpha^\beta f(x,t)dx \right] dt = \int_\alpha^\beta \left[\int_a^b f(x,t)dt \right] dx$$

- se calculează $h(x) = \int_a^b f(x,t)dt$, $x \in [\alpha, \beta]$;
- se calculează $\int_\alpha^\beta h(x)dx$, obținându-se, pe baza egalității precedente, integrala cerută.

6.3. Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 6.3.1. Să se demonstreze că funcţiile următoare sunt integrabile pe intervalele de definiţie precizate:

a) $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ 1, \ x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right] \end{cases}$

b) $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, \ x = \frac{1}{3} \\ 0, \ x \neq \frac{1}{3} \end{cases}$

c) $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

d) $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Soluţii: a) Funcţia f este evident, crescătoare pe [0, 1], deci este integrabilă.

b) Observăm că f are un singur punct de discontinuitate, $x_0 = \frac{1}{3}$, prin urmare este integrabilă pe [0, 1]. Ea nu este însă monotonă pe acest interval.

c) Deoarece $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$, deducem că f este continuă pe [0, 1] şi, prin urmare, integrabilă pe acest interval.

d) Funcţia f este, evident, continuă pe (0, 1]. În $x_0 = 0$ funcţia nu are limită; considerând $x_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$, $n \in \mathbf{N}^*$, avem, evident, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ considerând $y_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}}$, $n \in \mathbf{N}$, $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, dar $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = 1$. Prin urmare, f nu este continuă în $x_0 = 0$. Având un singur punct de discontinuitate, funcţia este integrabilă pe [0, 1].

Exerciţiul 6.3.2. Să se demonstreze că funcţiile următoare nu sunt integrabile pe intervalele de definiţie corespunzătoare:

a) $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{daca } x \neq \frac{1}{n}, n \in N^* \\ n, & \text{daca } x = \frac{1}{n}, n \in N^* \end{cases}$

b) $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{daca } x \in Q \\ -1, & \text{daca } x \in R \setminus Q \end{cases}$

Soluţii: a) Funcţia f este, evident, nemărginită, deci ea nu este integrabilă.

b) Să considerăm d: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ o diviziune a intervalului [a, b].

Pentru fiecare $i = 1, 2, \ldots, n$ putem alege $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i] \cap \mathbf{Q}$ sau $\zeta_i' \in [x_{i-1}, x_i] \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$.

Pentru $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i] \cap \mathbf{Q}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, fie

$\sigma(d, \zeta) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$ suma Riemann asociată funcţiei f, diviziunii d şi alegerii punctelor intermediare $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)$.

Avem $\sigma(d, \zeta) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = b - a$ şi deci

$\lim_{n\to\infty} \sigma(d, \zeta) = b - a$.

Pentru $\zeta'_i \in [x_{i-1}, x_i] \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$, i = 1, 2, ..., n, avem :

$\sigma(d, \zeta') = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta'_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (-1) \cdot (x_i - x_{i-1}) = a - b$ este suma Riemann asociată lui f, d şi sistemului de puncte intermediare $\zeta' = (\zeta'_1, \zeta'_2, \ldots \zeta'_n)$.

Am găsit deci două şiruri de sume Riemann cu limite diferite, aşadar funcţia f nu este integrabilă pe [a, b].

Exerciţiul 6.3.3. Folosind integrala simplă, să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \left(1^p + 2^p + \ldots + n^p\right), p > 0$$

Soluţie. Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, fie $a_n = \frac{1}{n^{p+1}} \left(1^p + 2^p + \ldots + n^p\right) =$

$$\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^p\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p$$

Dacă $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^p$, $p > 0$ fixat, considerăm diviziunea d_n determinată de punctele $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$ unde $x_i = \frac{i}{n}$, i = 1, 2, ..., n şi sistemul $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)$ de puncte intermediare, unde $\zeta_i = x_i = \frac{i}{n}$, i = 1, 2, ..., n atunci, evident, $a_n = \sigma_f(d_n, \zeta)$, $n \in \mathbf{N}^*$. Funcţia f este continuă pe [0, 1], deci integrabilă pe acest interval. Rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_f(d_n, \zeta) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^p dx = \left.\frac{x^{p+1}}{p+1}\right|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

Exercițiul 6.3.4. Să se arate că funcțiile următoare admit primitive.

a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \sin\frac{1}{x}, daca\ x \neq 0 \\ 0 \quad , daca\ x = 0 \end{cases}$

b) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & daca\ x \neq 0 \\ 0 \quad , & daca\ x = 0 \end{cases}$

Soluții. a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$, deci funcția f este continuă în origine. Ea este continuă și pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, fiind compunere de funcții continue. Așadar, funcția f este continuă pe $\mathbf{R}$. Cum orice funcție continuă admite primitive, rezultă că funcția f admite primitive.

b) Vom construi efectiv o primitivă a funcției f, adică vom încerca să găsim o funcție $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încât să avem $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Evident funcția F trebuie să fie derivabilă pe $\mathbf{R}$.

$$\text{Avem: } \left(\sin\frac{1}{x}\right)' = \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2} \cdot \cos\frac{1}{x},\ x \neq 0.$$

$$\text{Rezultă: } \cos\frac{1}{x} = -x^2 \cdot \left(\sin\frac{1}{x}\right)' = \left(-x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}\right)' + 2x\sin\frac{1}{x},\ x \neq 0.$$

Să considerăm funcția $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$g(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & daca\ x \neq 0 \\ 0 \quad , & daca\ x = 0 \end{cases}$. Funcția g este continuă pe $\mathbf{R}$, deci admite primitive pe $\mathbf{R}$. Fie $G: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o primitivă a sa. Deci $G'(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Atunci :

$$\cos\frac{1}{x}=\left(-x^2\sin\frac{1}{x}\right)'+2G'(x)=\left(-x^2\sin\frac{1}{x}+2G(x)\right)',\ x\neq 0.$$

Fie F : $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin:

$$F(x)=\begin{cases}-x^2\sin\dfrac{1}{x}+2G(x)+C_1, & \text{daca } x\neq 0\\ C_2, & \text{daca } x=0\end{cases}$$

unde constantele C_1, C_2 urmează a fi determinate din condiția de continuitate a funcției F.

Vom arăta că F este o primitivă pentru funcția f.

$$\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\left(-x^2\sin\frac{1}{x}+2G(x)+C_1\right)=2G(0)+C_1$$

$F(0) = C_2$

Dar F trebuie să fie o funcție continuă, deci $\lim_{x\to 0} F(x) = F(0)$, adică: $2G(0) + C_1 = C_2$.

Aşadar, $F(x) = \begin{cases}-x^2\sin\dfrac{1}{x}+2G(x)+C_1, & \text{daca } x\neq 0\\ 2G(0)+C_1, & \text{daca } x=0\end{cases}$

Este evident că pentru orice $x \neq 0$ avem $F'(x) = f(x)$. Veirifcăm faptul că $F'(0) = f(0)$.

Într-adevăr,

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2\sin\dfrac{1}{x}+2G(x)+C_1-C_1-2G(0)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-x\sin\frac{1}{x}\right)+2\lim_{x\to 0}\frac{G(x)-G(0)}{x}=2G'(0)=2g(0)=0=f(0).$$

Aşadar F'(x) = f(x), pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Deci F este o primitivă pentru funcţia f.

Exerciţiul 6.3.5. Să se arate că funcţiile următoare nu posedă primitive pe $\mathbf{R}$

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ daca } x > 0 \\ 0, \text{ daca } x = 0 \\ -1, \text{ daca } x < 0 \end{cases}$

b)) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \text{ , daca } x \in Q \\ x^3, \text{ daca } x \in R \setminus Q \end{cases}$

c)) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, \text{daca } x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, \qquad\qquad \text{daca } x = 0 \end{cases}$

Soluţii. a) f([-3, 5]) = {-1, 0, 1}. Cum această mulţime nu este un interval, rezultă că f nu are proprietatea lui Darboux şi, prin urmare, nu admite primitive.

b) Observăm că $f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$ şi $f(\sqrt{5}) = 5\sqrt{5}$. Evident, $3\sqrt{3} < 8 < 5\sqrt{5}$, dar $8 \neq f(x)$, $\forall x \in (\sqrt{3}, \sqrt{5})$. Aşadar f nu are proprietatea lui Darboux, deci nu admite primitive.

c) Se observă că $2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} = \left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)'$ şi deci, dacă funcţia f ar admite o primitivă $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, atunci ea ar fi de forma:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + C_1, & \text{daca } x \neq 0 \\ C_2, & \text{daca } x = 0 \end{cases}$$

Orice primitivă este funcţie derivabilă, deci continuă, prin urmare, primitiva F este continuă în origine , deci $\lim_{x\to 0} F(x) = F(0)$, de unde $C_1 = C_2$

Aşadar, funcţia F va fi de forma :

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + C_1, & \text{daca } x \neq 0 \\ C_1 & \text{,daca } x = 0 \end{cases}$$

Observând că $F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} + C_1 - C_1}{x} = 0$

şi ţinând seama de faptul că $f(0) = \frac{1}{2}$, deducem că $F'(0) \neq f(0)$. Contradicţie cu definiţia noţiunii de primitivă.

Deci funcţia f nu admite primitive pe $\mathbf{R}$.

Exerciţiul 6.3.6. Să se arate că funcţia f: [0, 1] → $\mathbf{R}$ definită prin :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{daca } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 1, & \text{daca } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

este integrabilă pe [0, 1], dar nu posedă nici o primitivă pe [0, 1].

Soluţie. Evident, funcţia f este monotonă, deci integrabilă pe intervalul [0,1] . Ea nu admite însă primitive pe [0, 1] , neavând proprietatea lui Darboux, căci f([0, 1]) = {0, 1} care nu este interval.

Exerciţiul 6.3.7. Să se arate că funcţia f: [0, 1] → $\mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & \text{daca } x \in (0,1] \\ 0, & \text{daca } x = 0 \end{cases}$$

admite primitive pe [0, 1] , dar nu este integrabilă pe [0, 1] .

Soluţie. Se poate arăta la fel ca în exerciţiul 6.3.3. că funcţia F: [0, 1] $\to$ **R**

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2} + C, & \text{daca } x \in (0,1] \\ C, & \text{daca } x = 0 \end{cases}$$

este o primitivă a lui f pe [0, 1] .

Funcţia f nu este însă integrabilă pe [0, 1] , nefiind mărginită pe acest interval.

Într-adevăr, considerând şirul $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $n \in \mathbf{N}^*$, obţinem $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$, ceea ce justifică nemărginirea funcţiei f.

Exerciţiul 6.3.8. Să se arate că $\int_1^2 \ln(1+x)dx > \int_1^2 \frac{x}{1+x}dx$.

Soluţie. Considerăm funcţia $f(x) = \ln(1 + x) - \frac{x}{1+x}$, $x \in [1, 2]$

Deoarece $f'(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$, $\forall x \in [1, 2]$, rezultă că $f'(x) > 0$, $\forall x \in [1, 2]$

Aşadar, f este o funcţie strict crescătoare pe intervalul [0,1].

Deci pentru orice $x > 1$ avem $f(x) > f(1)$, adică $f(x) > \ln 2 - \frac{1}{2} > 0$. Deci $f(x) > 0$, $\forall x \in [1, 2]$. Rezultă $\int_1^2 f(x)dx > 0$, de unde se obţine inegalitatea cerută.

Exercițiul 6.3.9. Să se arate că $2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4$.

Soluție. Fie funcția $f : [0, 2] \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{x^2}$. Atunci $f'(x) = 2x e^{x^2}$, $\forall x \in [0, 2]$.

Din tabloul de variație pe intervalul de integrare, obținem tabelul următor:

x	0		2
f'(x)	0		+
f(x)	1	⟶	e^4

$1 \leq f(x) \leq e^4$, $\forall x \in [0, 2]$.

Deci $1 \cdot (2 - 0) \leq \int_0^2 f(x)dx \leq e^4 \cdot (2 - 0)$, adică $2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4$,

ceea ce trebuia arătat.

Exercițiul 6.3.10. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\, dx$

b) $\int_0^{1/2} e^{-x} \cos \pi x dx$

c) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx$

d) $\int_1^e \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2} dx$

e) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$

f) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5} dx$

g) $\int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$

h) $\int_2^3 \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{x^2 - 1}}$

Soluţii. a) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx =$

$= 4\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 4\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + \int_0^1 x\left(\sqrt{4-x^2}\right)'dx =$

$= 4\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 + + x\sqrt{4-x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx =$

$= 4\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - \int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx.$

Deci $2\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$, adică $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx =$

$= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$

b) Aplicăm de două ori formula de integrare prin părţi:

$$\int_0^{1/2} e^{-x}\cos\pi x\,dx = -\int_0^{1/2} (e^{-x})'\cos\pi x\,dx = -e^{-x}\cdot\cos\pi x\Big|_0^{1/2} +$$

$$+\int_0^{1/2} e^{-x}(-\sin\pi x)\cdot\pi dx = 1-\pi\int_0^{1/2} e^{-x}\sin\pi x\,dx = 1+\pi\int_0^{1/2}(e^{-x})'\sin\pi x\,dx$$

$$= 1 + \pi e^{-x}\sin\pi x\Big|_0^{1/2} - \pi\int_0^{1/2} e^{-x}\cos\pi x\cdot\pi dx =$$

$$= 1 + \pi e^{-1/2} - \pi^2\int_0^{1/2} e^{-x}\cdot\cos\pi x\,dx$$

Rezultă că $(1+\pi^2)\int_0^{1/2} e^{-x}\cos \pi x dx = 1 + \pi e^{-1/2}$ şi deci

$$\int_0^{1/2} e^{-x}\cos \pi x dx = \frac{1+\pi e^{-1/2}}{1+\pi^2} = \frac{\sqrt{e}+\pi}{\sqrt{e}(1+\pi^2)}.$$

c) Avem $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{(1+\sin^2 x)'}{1+\sin^2 x} dx$

şi folosind prima formulă a schimbării de variabilă, obţinem:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx = \ln(1+\sin^2 x)\Big|_0^{\pi/2} = \ln 2.$$

d) Se observă că $\frac{x}{(1+x^2)^2} = \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)'$ şi folosind formula de integrale prin părţi, obţinem:

$$I = \int_1^e \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} dx = \int_1^e \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)'\cdot \ln x dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot \ln x\Big|_1^e + \int_0^e \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2}\cdot\int_0^e \frac{1}{x(1+x^2)} dx$$

Pentru calculul acestei din urmă integrale folosim descompunerea în fracţii simple, şi anume:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

Un calcul simplu ne arată că A = 1, B = -1 şi C = 0.

Deci $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{1+x^2}$ şi deci integrala cerută devine:

$$I = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2}\int_1^e \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int_1^e \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_1^e \frac{2x}{1+x^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\int_1^e \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2)\Big|_1^e =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln(1+e^2) + \frac{1}{4}\ln 2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{e}{\sqrt{1+e^2}} + \frac{1}{4}\ln 2.$$

c) Se foloseşte a doua formulă a schimbării de variabilă. Facem schimbarea de variabilă $\sqrt{e^x - 1} = t$, adică $x = \ln(1 + t^2)$. Integrala devine:

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx = \int_0^2 \frac{(1+t^2)\cdot t}{1+t^2+3}\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt = \int_0^2 \frac{2t^2}{t^2+4}dt =$$

$$= 2\int_0^2 \frac{t^2}{t^2+4}dt = 2\int_0^2 \frac{t^2+4-4}{t^2+4}dt = \int_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2+4}\right)dt =$$

$$= 2\left(t\Big|_0^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot arctg\frac{t}{2}\Big|_0^2\right) = 2\left(2 - 2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) = 4 - \pi$$

f) Se foloseşte schimbarea de variabilă $tg\frac{x}{2}$ = t, de unde x = 2arctg t şi integrala cerută devine:

$$\int_0^1 \frac{2}{6t^2+4t+4}dt = \int_0^1 \frac{1}{3t^2+2t+2}dt = \int_0^1 \frac{1}{\left(\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+2-\frac{1}{3}}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{5}{3}}dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot arctg\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \left(\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot arctg\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot arctg\frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot arctg\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(s-a ţinut seama de $\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ şi $\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$)

g) Folosim schimbarea de variabilă x = 2sin t

Avem : $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} 4\sin^2 t \cdot \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2\cos t dt =$

$$= \int_0^{\pi/2} 2^4 \cdot \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt = 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = 4\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 4t}{2}dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)dt = 2\left(t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin 4t}{4}\Bigg|_0^{\pi/2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \pi$$

h) Efectuăm schimbarea de variabilă $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t$, deci $x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$.

Integrala devine:

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{(1-t^2)^2}{4t} \cdot \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Exercițiul 6.3.11. Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, aplicând formula trapezelor și apoi formula lui Simpson, pentru n = 10.

Soluție. Luând în formula trapezelor n = 10, se determină eroarea maximă 0,0004166.

Efectuând calculele se obține $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}7849812$. Dacă se ia în considerare și eroarea, se găsește $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}7853978$. Cu formula lui Simpson, pentru n = 10 se obține $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}785398$.

Eroarea maximă este în acest caz 0,0000008.

Observație. Ținând cont de faptul că $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$, se poate obține valoarea aproximativă a numărului π, utilizând exercițiul anterior.

Astfel, cu metoda trapezelor avem:

$$\frac{\pi}{4} \approx 0{,}7853978, \text{ deci } \pi \approx 3{,}1415912,$$

iar cu metoda lui Simpson, avem :

$$\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785398, \text{ deci } \pi \approx 3{,}141592$$

Exerciţiul 6.3.12. Să se calculeze cu trei zecimale exacte integrala următoare $\int_0^1 \cos x^2 dx$.

Soluţie. Pentru calculul aproximativ al acestei integrale se foloseşte dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei cos x^2, deoarece primitiva acestei funcţii nu se poate exprima cu ajutorul funcţiilor elementare.

Avem $\cos x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{4n}}{(2n)!}, x \in \mathbf{R}$.

Deci $\int_0^1 \cos x^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{1}{4n+1}$.

Calculând suma primilor cinci termeni prin transformarea lor în fracţie zecimală, prin lipsă şi prin adaos unde transformarea nu se face exact, cu patru zecimale, obţinem

$$0{,}9035 < \int_0^1 \cos x^2 dx < 0{,}9036$$

deci $\int_0^1 \cos x^2 dx = 0{,}903\ldots$

Exerciţiul 6.3.13. Să se determine aria domeniului $D \subset \mathbf{R}^2$ mărginit de graficul funcţiei $f(x) = e^{-x} \sin x$, $x \in \mathbf{R}$, axa Ox şi dreptele $x = 0$ şi $x = 2\pi$.

Soluţie. Ţinând seama de 6.1.6.1. avem :

$$a(D) = \int_0^{2\pi} e^{-x}|\sin x|dx = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\sin x dx .$$

Integrând prin părți, obținem

$$\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx = -\int_0^{\pi} e^{-x}(\cos x)' dx = -e^{-x}\cdot\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}(e^{-x})'\cos x dx$$

$$= e^{-\pi}+1 - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x dx = e^{-\pi}+1 - \int_0^{\pi} e^{-x}(\sin x)' dx =$$

$$= e^{-\pi}+1 - e^{-x}\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx = e^{-\pi}+1 - \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx .$$

Rezultă: $\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx = \frac{1}{2}\left(e^{-\pi}+1\right).$

Analog,

$$\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\sin x dx = -\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}(\cos x)' dx = e^{-x}\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}(e^{-x})'\cos x dx =$$

$$= -e^{-2\pi} - e^{-\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\cos x dx = -e^{-2\pi} - e^{-\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}(\sin x)' x dx =$$

$$= -e^{-2\pi} - e^{-\pi} - e^{-x}\sin x\Big|_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}(e^{-x})'\sin x dx =$$

$$= -e^{-2\pi} - e^{-\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\sin x dx .$$

Rezultă: $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\sin x dx = -\frac{1}{2}\left(e^{-2\pi}+e^{-\pi}\right).$

Prin urmare, $a(D) = \frac{1}{2}\left(e^{-\pi}+1\right)+\frac{1}{2}\left(e^{-2\pi}+e^{-\pi}\right)=e^{-\pi}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2\pi}$.

Exerciţiul 6.3.14. Să se determine volumul corpului $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f : [0, \pi] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \cos x$.

Soluţie. Ţinând seama de 8.1.6.2. , deducem:

$$v(\Omega) = \pi\int_0^{\pi}\cos^2 x dx = \pi\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{\pi}{2}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

Exerciţiul 6.3.15. Să se determine lungimea graficului funcţiei $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \arcsin e^{-x}$.

Soluţie. Ţinând seama de 6.1.6.3. , obţinem:

$$l(\gamma) = \int_0^1\sqrt{1+f'^2(x)}dx = \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}} = \int_0^1\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx =$$

$$= \int_1^e\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \ln(t+\sqrt{t^2-1})\Big|_1^e = \ln(e+\sqrt{e^2-1}).$$

Exerciţiul 6.3.16. Să se arate că funţia $F: (1, \infty) \to \mathbf{R}$

$F(x) = \int_0^{\pi/2}\ln(x^2-\sin^2 t)dt$ este continuă pe $(1, \infty)$.

Soluţie. Funcţia $f : (1, \infty) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, $f(x, t) = \ln(x^2 - \sin^2 t)$ este continuă pe $(1, \infty) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, fiind compunere de funcţii continue (evident, pentru orice $(x, t) \in (1, \infty) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avem $x^2-\sin^2 t > 0$).

Exercițiul 6.3.17. Fie F: (-1, 1) → **R** , definită prin:

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cdot \ln(1 + x\cos t)dt$$

Să se arate că funcția F este derivabilă pe (-1, 1) și să se determine derivata ei.

Soluție. Funcția $f : (-1, 1) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$,

$$f(x, t) = \frac{1}{\cos t} \cdot \ln(1 + x\cos t)$$

este continuă pe $(-1, 1) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, fiind compunere de funcții continue.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{1}{1 + x\cos t} \cdot \cos t = \frac{1}{1 + x\cos t}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ este evident continuă pe $(-1, 1) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Deci F este derivabilă pe (-1, 1), iar $F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + x\cos t} dt$.

Făcând schimbarea de variabilă $tg\frac{t}{2} = u$, obținem:

$$F'(x) = 2\int_0^1 \frac{1}{u^2(1-x) + (1+x)} du = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot arctgu\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\Bigg|_{u=0}^{u=1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Exercițiul 6.3.18. Folosind posibilitatea de derivare în raport cu parametrul, să se calculeze integrala:

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cdot \ln \frac{1+x\cos t}{1-x\cos t}\, dt \text{, unde } x \in (-1, 1).$$

Soluție. Integrala cerută nu poate fi calculată prin metode elementare. Sunt satisfăcute însă condițiile teoremei 6.1.7.3. pentru funcția $f : (-1, 1) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x, t) = \frac{1}{\cos t} \cdot \ln \frac{1+x\cos t}{1-x\cos t}$. Așadar funcția

$F : (-1, 1) \to \mathbf{R}$, $F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cdot \ln \frac{1+x\cos t}{1-x\cos t}\, dt$ este derivabilă pe

$(-1, 1)$ și $F'(x) = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+x\cos t)(1-x\cos t)}\, dt$, pentru orice $x \in (-1,1)$.

Integrala obținută se mai poate scrie:

$$F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+x\cos t}\, dt + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-x\cos t}\, dt$$

și folosind substituția $tg\frac{t}{2} = u$, se obține:

$$F'(x) = 2\int_0^1 \frac{1}{(1+x)+(1-x)u^2}\, du + 2\int_0^1 \frac{1}{(1-x)+(1+x)u^2}\, du,$$

adică $F'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \left[arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + arctg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right]$ şi folosind egalitatea trigonometrică $arctg\,\alpha + arctg\,\frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2}$, obţinem

$F'(x) = \frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}$, pentru orice $x \in (-1, 1)$, de unde deducem că

$F(x) = \pi \arcsin x + C$, unde C trebuie determinat.

Făcând pe $x = 0$, obţinem $F(0) = C$ şi, cum din relaţia de definiţie $F(0) = 0$, rezultă $C = 0$. Prin urmare, $F(x) = \pi \arcsin x$, pentru orice $x \in (-1, 1)$.

Exerciţiul 6.3.19. Folosind posibilitatea inversării ordinii de integrare în integralele depinzând de un parametru, să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$, unde $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ este funcţia definită prin :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}, & x \neq 0, x \neq 1, \text{unde } 0 < \alpha < \beta \\ 0, & x = 0 \\ \beta - \alpha, & x = 1 \end{cases}$$

Soluţie. Observăm că $\frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} = \int_\alpha^\beta x^t dt$, deci $\int_0^1 f(x)dx =$

$= \int_0^1 \left[\int_\alpha^\beta x^t dt \right] dx$. Cum teorema 8.1.7.5. este aplicabilă, schimbând ordinea de integrare, obţinem:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_\alpha^\beta \left[\int_0^1 x^t dx \right] dt = \int_\alpha^\beta \frac{1}{t+1} dt = \ln \frac{\beta+1}{\alpha+1}$$

Exercițiul 6.3.20. Să se calculeze I = $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cdot \ln \frac{2+\cos t}{2-\cos t} dt$.

Soluție. Se observă că I = $F\left(\frac{1}{2}\right)$, unde F este funcția determinată la exercițiul 6.2.20. Folosind expresia lui F din 6.2.20. , obținem:

$$I = F\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{6}$$

6.4. Exerciții propuse

Exercițiul 6.4.1. Să se arate că funcțiile următoare sunt integrabile, dar nu posedă primitive:

a) f: [0, 1] $\to \mathbf{R}$, f(x) = $\begin{cases} \sin x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$

b) f: [-1, 1] $\to \mathbf{R}$, f(x) = $\begin{cases} x, & \text{daca } x \in [-1,0] \\ 1 - x, & \text{daca } x \in (0,1] \end{cases}$

c) f: [-1, 1] $\to \mathbf{R}$, f(x) = $\begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & \text{daca } x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{daca } x = 0 \end{cases}$

d) $f: [-1, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3+\sin\frac{1}{x}, & \text{daca } x \in [-1,0) \\ 0, & \text{daca } x = 0 \\ 3+\sin\frac{1}{x}, & \text{daca } x \in (0,1] \end{cases}$

Exercițiul 6.4.2. Să se arate că funcțiile următoare posedă primitive pe $\mathbf{R}$ și sunt integrabile pe orice interval compact.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos^2\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, \ x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$

Exercițiul 6.4.3. Demonstrați că funcția $F : [0, 1]] \to \mathbf{R}$, definită prin :

$F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x}{\ln x} \cdot \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$ este derivabilă pe [0, 1], dar derivata sa nu este integrabilă pe [0, 1]. Deduceți că există funcții care posedă primitive, dar nu sunt integrabile.

Exercițiul 6.4.4. Fără a calcula integralele; să se cerceteze care dintre ele are valoarea mai mare :

a) $I_1 = \int_0^1 e^{x^2} dx$, $I_2 = \int_1^2 e^x dx$

b) $I_1 = \int_2^{10} x\, arctg\, x\, dx$, $I_2 = \int_2^{10} \ln(1+x^2)dx$

Exercițiul 6.4.5. Să se calculeze :

a) $\int_{-\pi}^{\pi/2} \sin(x+|x|)dx$

b) $\int_{-2}^{2} (|x|-|3x-1|)dx$

c) $\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}} dx$

d) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x}$

e) $\int_1^5 \sqrt[3]{x-|x-3|}dx$

f) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x}$

g) $\int_0^3 \max(x, x^2)dx$

h) $\int_0^{\pi/2} \min(\sin x, \cos x)dx$

R. a) 1 ; b) $-\frac{25}{3}$; c) $\sqrt{x} = t, \sqrt{1+t} = t+u$;d) tg x = t; $\frac{1}{4}\ln 3$

e) $\frac{25}{8}\sqrt[3]{3} - \frac{3}{8}$; f) cos x = t; $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$; g) $\frac{55}{6}$; h) $2\sqrt{2}$

Exercițiul 6.4.6. Fie $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}dx$, $n \in \mathbf{N}$. Să se stabilească o relație de recurență și să se calculeze I_3.

R. $I_n = \frac{2n}{2n+3} \cdot I_{n-1}$, $\forall\ n \in \mathbf{N}^*$; $I_3 = \frac{32}{315}$.

Exercițiul 6.4.7. Să se calculeze :

a) $\int_1^2 \sqrt{(x-1)(x-2)}dx$

b) $\int_0^{2\pi} x \mid \cos x \mid dx$

c) $\int_{\pi}^{5\pi/4} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$

d) $\int_0^{\pi/4} \ln(1+tgx)dx$

e) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + x - 1}{e^x + \sin x + \cos x + 2x}dx$

f) $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}dx$

R. a) $\frac{\pi}{8}$; c) $\frac{\pi}{4}$; d) $\frac{\pi \ln 2}{8}$; e) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\pi/2} + 1 + \pi}{2}$;

f) $x = \pi - t$, $I = \frac{\pi^2}{4}$.

Exercițiul 6.4.8. Să se calculeze :

a) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}dx$

b) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

c) $\int_0^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \cdot e^x dx$

d) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$

e) $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$

f) $\int_0^a \sqrt{ax - x^2}dx$

R. a) Indicaţie. Se face schimbarea de variabilă $x = \frac{\pi}{2} - t$ şi se obţine I = $\frac{\pi}{4}$; b) x = tg t; $\frac{\pi}{8}\ln 2$; c) $e^{\frac{\pi}{2}}$; d) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; e) $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$; f) $\frac{\pi a^2}{8}$.

Exerciţiul 6.4.9. Fie f : [0, 1] → **R** o funcţie mărginită. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx = 0.$$

Exerciţiul 6.4.10. Să se calculeze cu trei zecimale exacte integralele următoare:

a) $\int_0^2 \frac{\sin x}{x}dx$; b) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$

R. a) 1,605... ; b) 0,927...

Exerciţiul 6.4.11. Folosind metoda trapezelor pentru n = 12, să se calculeze valoarea aproximativă şi eroarea pentru integrala $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$.

R. 0,83566

Exerciţiul 6.4.12. Cu ajutorul metodei lui Simpson să se calculeze valoarea aproximativă a următoarelor integrale :

a) $\int_1^9 \sqrt{x}dx$, n = 4 b) $\int_0^1 \frac{x}{\ln(1+x)}dx$, n = 10

R. a) 17,333 ; b) 0,2288

Exeerciţiul 6.4.13. Să se determine aria domeniului mărginit de :

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, axa Ox, x = 1 şi x =2

b) $f(x) = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|$, axa Ox, x = 0 şi x = 2

c) $f(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x}$, axa Ox, x = 0 şi x = $\frac{3\pi}{4}$.

R. a) $\ln(2-\sqrt{3})+\sqrt{3}$; b) $\ln\frac{16}{9}$; c) $-2 + \text{tg}\,\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{4}$

Exerciţiul 6.4.14. Să se determine aria domeniului mărginit de graficele funcţiilor $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x$ şi $g: (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \ln^2 x$.

R. 3 – e

Exerciţiul 6.4.15. Să se determine volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f : [1, e] \to \mathbf{R}$ $f(x) = x \ln x$.

R. $\frac{\pi}{27}(5e^3 - 2)$

Exerciţiul 6.4.16. Să se determine lungimea graficului pentru următoarele funcţii :

a) $f : [0, 4] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^{3/2}$

b) $f : \left[\sqrt{3}, \sqrt{8}\right] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x$

R. a) $\frac{8}{27}\left(10^{3/2} - 1\right)$; b) $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

Exerciţiul 6.4.17. Să se arate că funcţiile următoare sunt continue pe domeniile indicate:

a) $F(x) = \int_0^{\pi} \ln(1 + x\cos t)dt$, $x \in (-1, 1)$;

b) $F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cdot \ln(1 + x\cos t)dt$; $x \in (-1, 1)$;

c) $F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin t} \cdot \ln\frac{1 + x\sin t}{1 - x\sin t}dt$; $x \in (-1, 1)$;

d) $F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t)dt$; $x \in (0, \infty)$;

e) $F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1 - x^2t^2)}{\sqrt{1 - t^2}}dt$; $x \in (-1, 1)$;

f) $F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{tgt} \cdot arctg(xtgt)dt$; $x \in [0, \infty)$.

Exercițiul 6.4.18. Folosind teorema de derivare în raport cu parametrul, să se calculeze următoarele integrale :

a) $\int_0^{\pi} \ln(1 + x\cos t)dt$; $x \in (-1, 1)$;

b) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cdot \ln(1 + x\cos t)dt, |x| < 1$

c) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin t} \cdot \ln\frac{1 + x\sin t}{1 - x\sin t}dt, |x| < 1$

d) $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t)dt, x > 0$

e) $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2t^2)}{\sqrt{1-t^2}}dt, |x|<1$

f) $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2t^2)}{t^2\sqrt{1-t^2}}dt, |x|<1$

g) $\int_0^{\pi/2} \frac{arctg(x\sin t)}{\sin t}dt$

h) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{tgt}\cdot arctg(xtgt)dt, x \geq 0$

i) $\int_0^{\pi/2} \ln(x^2-\sin^2 t)dt, x>1$

R. a) $\pi \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}$, b) $\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}(\arccos x)^2$, c) π arcsin x,

d) $\pi \ln\frac{x+1}{2}$, e) $\pi \ln\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)$, f) $\pi\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)$,

g) $\frac{\pi}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, h) $\frac{\pi}{2}\ln(x+1)$, i) $\pi \ln\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}$

Exercițiul 6.4.19. Folosind posibilitatea inversării ordinii de integrare, să se calculeze:

a) $\int_0^1 f(x)dx$, unde f(x) = $\begin{cases} \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}\cdot \sin(\ln x), & x \neq 0 \text{ si } x \neq 1 \\ 0, & x = 0 \text{ sau } x = 1 \end{cases}$,

$\alpha, \beta > 0$

b) $\int_0^1 f(x)dx$, unde f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} \cdot \cos(\ln\dfrac{1}{x}), & x \neq 0 \text{ si } x \neq 1 \\ 0, & x = 0 \\ \beta - \alpha, & x = 1 \end{cases}$

R. a) arctg $\dfrac{a-b}{1+(a+1)(b+1)}$, b) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{(b+1)^2+1}{(a+1)^2+1}$

Exercițiul 6.4.20. Utilizând integralele cu parametru, să se calculeze:

a) $I_1 = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\dfrac{26}{15} - \sin^2 t\right)dt$

b) $I_2 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + 9\sin^2 t)dt$

c) $I_3 = \int_0^{\pi/2} \dfrac{1}{\cos t}\ln\left(1+\dfrac{\cos t}{2}\right)dt$

d) $I_4 = \int_0^{\pi/2} \dfrac{arctg(\sin t)}{\sin t}dt$

R. a) Se observă că $I_1 = F\left(\dfrac{5}{4}\right)$, unde $F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(x^2 - \sin^2 t)dt$

Folosind rezultatul exercițiului 8.4.25, punctul i), obținem $I_1 = 0$.

b) $I_2 = \pi \ln 2$; c) $I_3 = \dfrac{5\pi^2}{72}$; d) $I_4 = \dfrac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$

7. INTEGRALA IMPROPRIE. INTEGRALA IMPROPRIE CU PARAMETRU.

7.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale.

Definiţia 7.1.1. Fie funcţia $f : I \to \mathbf{R}$ unde I este un interval arbitrar cu extremităţile $\alpha , \beta \in \overline{R}$. Funcţia f se numeşte *impropriu integrabilă pe I* dacă este integrabilă pe orice interval compact inclus în I şi, pentru orice $c \in I$, există şi sunt finite limitele: $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ a>\alpha}} \int\limits_a^c f(x)dx$ şi $\lim\limits_{\substack{x \to \beta \\ b<\beta}} \int\limits_c^b f(x)dx$. Suma acestor limite se numeşte *integrala improprie* a funcţiei f pe intervalul I şi notăm:

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\substack{x \to \alpha \\ a>\alpha}} \int\limits_a^c f(x)dx + \lim_{\substack{x \to \beta \\ b<\beta}} \int\limits_c^b f(x)dx$$

Dacă funcţia f este impropriu integrabilă pe I, se mai spune că integrala improprie $\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx$ este *convergentă* . În caz contrar, ea este *divergentă.*

Observaţia 7.1.1. a) Definiţia convergenţei, precum şi valoarea integralei improprii sunt independente de alegerea punctului $c \in I$.
b) Deoarece integrala simplă este funcţie continuă de extremităţile sale de integrare, rezultă că dacă $I = [\alpha, \beta]$ este un interval compact, integrala improprie a funcţiei f pe intervalul I coincide cu integrala simplă a acestei funcţii pe acest interval. Din acelaşi motiv, integrala funcţiei f pe intervalul

$[\alpha, \beta]$ coincide cu integrala funcției f pe fiecare din intervalele: $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$, (α, β). Analog dacă $\beta = \infty$, integrala pe $[\alpha, \infty)$ coincide cu integrala pe (α, ∞). Este suficient deci să cunoaștem integralele improprii pe intervale deschise.

c) O integrală impropric poate fi redusă la o integrală improprie doar la unul din capete, scriind :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\beta} f(x)dx$$

De aceea este suficient să ne ocupăm de integrala improprie la unul din capete. Ca și la integrala simplă, acceptăm și la integrala improprie că :

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Prezentăm în continuare, câteva *proprietăți ale integralelor improprii* , care se transpun fără dificultate de la integralele simple.

Teorema 7.1.1. *(Proprietatea de liniaritate)*

Dacă funcțiile $f_1, f_2 : [\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$ sunt impropriu integrabile pe $[\alpha, \beta)$ atunci, pentru orice $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ funcția $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ este impropriu integrabilă pe $[\alpha, \beta)$ și

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x)dx = \lambda_1 \int_{\alpha}^{\beta} f_1(x)dx + \lambda_2 \int_{\alpha}^{\beta} f_2(x)dx$$

Teorema 7.1.2. *(Formula Leibnitz-Newton pentru integrala improprie)*

Dacă funcția $f : [\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$ este integrabilă pe orice interval compact inclus în $[\alpha, \beta)$ și admite o primitivă F pe $[\alpha, \beta)$, atunci f este impropriu integrabilă pe $[\alpha, \beta)$, dacă și numai dacă F are limită finită în β. În acest caz:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\substack{x \to \beta \\ x < \beta}} F(x) - F(\alpha)$$

Teorema 7.1.3. *(Formula de integrare prin părți)*

Dacă f, g : [α, β) →**R** sunt funcții derivabile cu derivate continue pe [α, β), încât f • g are limită în β și $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx$ este convergentă, atunci și integrala $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$ este convergentă și are loc egalitatea:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = \lim_{\substack{x\to\beta \\ x<\beta}} f(x)g(x) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx$$

(evident că rolul celor două integrale improprii care apar poate fi schimbat)

Teorema 7.1.4. *(Formula schimbării de variabilă)*

Fie f : [α, β) →**R** , φ : [α', β') →[α, β) încât φ(α') = α, $\lim_{\substack{x\to\beta' \\ x<\beta'}} \varphi(x)=\beta$

Dacă φ este derivabilă, cu derivata continuă pe [α', β') , f este continuă pe [α, β) și $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ este convergentă, atunci și integrala

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx$$

este convergentă și are loc egalitatea:

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$$

Observația 7.1.2. Dacă cunoaștem o primitivă a funcției f : [α, β) →**R** , putem stabili natura (convergența sau divergența) integralei improprii $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. După cum se știe, nu întotdeauna este posibil să determinăm o primitivă. De aceea este util să cunoaștem criterii de convergență, criterii cu

ajutorul cărora să putem stabili natura unei integrale improprii, fără a pretinde să-i găsim valoarea exactă.

Teorema 7.1.5. *(Criteriul lui Cauchy)*

Fie f : [α, β) →**R** o funcție integrabilă pe orice interval compact inclus în [α, β). Atunci $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ este convergentă dacă şi numai dacă, pentru orice ε > 0 există δ > 0, încât pentru orice b', b''∈ (β – δ, β) să avem :

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Definiția 7.1.2. Fie f : [α, β) →**R** . Integrala $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ se numeşte *absolut convergentă* dacă integrala $\int_{\alpha}^{\beta} | f(x) | dx$ este convergentă.

Teorema următoare stabileşte legătura dintre convergența integralelor improprii şi convergența absolută, subliniind asemănarea dintre intregralele improprii şi serii, precum şi deosebirea dintre integralele improprii şi integralele simple.

Teorema 7.1.6. Fie f : [α, β) →**R** o funcție integrabilă pe orice interval compact inclus în [α, β). Dacă integrala $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ este absolut convergentă, atunci ea este şi convergentă.

Observația 7.1.3. Reciproca acestei teoreme nu este, în general, adevărată. Pentru exemplul, fie f: [0, ∞) →**R** , f(0) = 1, f(x) = $(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ dacă

$x \in (n-1, n]$, $n \in \mathbf{N}^*$. Atunci $\int_0^{\infty} f(x)dx$ este convergentă şi nu este absolut convergentă :

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \ln 2$$

$$\int_0^{\infty} |f(x)|\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Teorema 7.1.7. *(Criteriul comparaţiei)*

Fie f, g : $[\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$ două funcţii care satisfac proprietăţile:

1) f şi g sunt integrabile pe orice interval compact inclus în $[\alpha, \beta)$;

2) pentru orice $x \in [\alpha, \beta)$, $|f(x)| \leq g(x)$;

3) $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ este convergentă. Atunci $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ este absolut convergentă.

Consecinţă. Fie f,g : $[\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^+$ două funcţii ce satisfac proprietăţile:

1) f şi g sunt integrabile pe orice interval compact inclus în $[\alpha, \beta)$;

2) pentru orice $x \in [\alpha, \beta)$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$;

În aceste două condiţii, dacă $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ este convergentă, atunci şi $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ este convergentă, iar dacă $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ este divergentă, atunci şi $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ este divergentă.

Observaţia 7.1.4. Printre funcţiile cele mai des folosite ca termen de comparaţie se află următoarele :

1) $g_1 : [a, \infty) \to \mathbf{R}^+$, $g_1(x) = \frac{1}{x^\lambda}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $a > 0$.

2) $g_2 : [a, b) \to \mathbf{R}^+$, $g_2(x) = \frac{1}{(b-x)^\lambda}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

3) $g_3 : [a, \infty) \to \mathbf{R}^+$, $g_3(x) = q^x$, $q > 0$, $a > 0$.

Cu definiţia se arată uşor că :

1) $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda}$ este convergentă, dacă $\lambda > 1$ şi divergentă dacă $\lambda \leq 1$;

2) $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ este convergentă dacă $\lambda < 1$ şi divergentă dacă $\lambda \geq 1$;

3) $\int_a^\infty q^x dx$ este convergentă, dacă $q < 1$ şi divergentă dacă $q \geq 1$.

Folosind ca termen de comparaţie funcţiile g_1 respectiv g_2 , se deduc următoarele criterii practice pentru convergenţa integralelor improprii pe interval nemărginit, respectiv din funcţii nemărginite pe intervalul de integrare.

Teorema 7.1.8. Fie $a > 0$ şi $f : [a, \infty) \to \mathbf{R}^+$ o funcţie integrabilă pe orice interval compact inclus în $[a, \infty)$. Presupunem că există $\lambda \in \mathbf{R}$, încât funcţia $x \to x^\lambda \cdot f(x)$ are limită când $x \to \infty$. Fie $l = \lim_{x \to \infty} x^\lambda \cdot f(x)$.

1) Dacă $\lambda > 1$ şi $0 \leq l \leq \infty$, atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă;

2) Dacă $\lambda \leq 1$ şi $0 < l \leq \infty$, atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă.

Teorema 7.1.9. Fie f : [a, b) $\to \mathbf{R}^+$ o funcţie integrabilă pe orice interval compact inclus în [a, b). Presupunem că există $\lambda \in \mathbf{R}$ încât funcţia $x \to (b - x)^{\lambda} \cdot f(x)$ are limită când $x \to b$. Fie $l = \lim_{x \to \infty} (b - x)^{\lambda} \cdot f(x)$.

1) Dacă $\lambda < 1$ şi $0 \leq l < \infty$, atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă;

2) Dacă $\lambda \geq 1$ şi $0 < l \leq \infty$, atunci $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

Observaţie 7.1.5. Aceste criterii practice, deşi au multe aplicaţii, au deyavantajul că servesc numai la stabilirea convergenţei integralelor improprii ale funcţiilor ce păstrează semn constant pe intervalul de integrare, sau la stabilirea convergenţei absolute. De aceea vom prezenta încă două criterii, mai generale, unul pentru convergenţa integralelor improprii pe intervalele nemărginite, celălalt pentru convergenţa integralelor improprii din funcţii nemărginite.

Teorema 7.1.10. Fie $a > 0$ şi φ: [a, ∞) $\to \mathbf{R}$ o funcţie continuă care admite o primitivă mărginită pe [a, ∞). Atunci, pentru orice $\lambda > 0$, integrala improprie $\int_a^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{\lambda}} dx$ este convergentă.

Teorema 7.1.11. Fie φ: [a, b) $\to \mathbf{R}$ o funcţie continuă care admite o primitivă mărginită pe [a, b). Atunci, pentru orice $\lambda > 0$, integrala improprie $\int_a^b (b - x)^{\lambda} \cdot \varphi(x)dx$ este convergentă.

Folosind ca termen de comparaţie funcţia g_3 : [a, ∞) $\to \mathbf{R}^+$, $g_3(x) = q^x$, $q > 0$, $a > 0$, se deduce următorul criteriu practic pentru convergenţa absolută a integralelor improprii pe intervalele nemărginite.

Teorema 7.1.12. *(Criteriul radical al lui Cauchy)*

Fie f: [a, ∞) $\to \mathbf{R}$, a > 0 o funcție integrabilă pe orice interval compact inclus în [a, ∞), cu proprietatea că există $l = \lim_{x\to b} |f(x)|^{\frac{1}{x}}$

1) Dacă $l < 1$, atunci $\int_a^{\infty} f(x)dx$ este absolut convergentă

2) Dacă $l > 1$, atunci $\int_a^{\infty} f(x)dx$ nu este absolut convergentă.

Teorema următoare subliniază legătura dintre integralele improprii şi serii numerice.

Teorema 7.1.13. *(Criteriul integral al lui Cauchy pentru convergența seriilor numerice)*

Fie f : [1, ∞) $\to \mathbf{R}^*$ o funcție descrescătoare. Următoarele afirmații sunt echivalente.

a) seria numerică generată de şirul $x_n = f(n)$, $n \in \mathbf{N}^*$, este convergentă;

b) şirul $u_n = \int_1^n f(x)dx$, $n \in \mathbf{N}^*$, este convergent;

c) integrala improprie $\int_1^{\infty} f(x)dx$ este convergentă.

Definiția 7.1.3. Fie f : [a, b)\ {c} $\to \mathbf{R}$ o funcție nemărginită, integrabilă pe orice interval compact [a, c - ε] $\subset$ [a, c) sau [c + ε, b] $\subset$ (c, b]. Dacă există $\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right]$ şi este finită, atunci integrala $\int_a^b f(x)dx$ se numeşte *convergentă în sensul valorii principale Cauchy* iar

această limită se numeşte *valoarea principală Cauchy* a integralei. Se notează:

$$V \cdot p \cdot \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right]$$

Observaţia 7.1.6. este evident că, dacă $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă, atunci ea este convergentă şi în sensul valorii principale Cauchy. Reciproca acestei afirmaţii nu este, în general, adevărată.

De exemplu, integrala improprie $\int_{-2}^{3}\frac{dx}{x}$ este convergentă în sensul valorii principale Cauchy, $V \cdot p \cdot \int_{-2}^{3}\frac{dx}{x} = \ln\frac{3}{2}$, dar nu este convergentă, deoarece $\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \varepsilon \to 0}}\left[\int_{-2}^{-\delta}\frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{3}\frac{dx}{x}\right]$ nu există.

Definiţia 7.1.4. Fie f : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie integrabilă pe orice interval compact [-b, b] $\subset \mathbf{R}$. Dacă există $\lim_{b \to \infty}\int_{-b}^{b} f(x)dx$ şi este finită, atunci integrala improprie $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ se numeşte *convergentă în sensul valorii principale Cauchy.*

Se notează :

$$\lim_{b \to \infty}\int_{-b}^{b} f(x)dx = V \cdot p \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

şi se numeşte *valoarea principală Cauchy* a integralei improprii $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Observaţia 7.1.7. a) Dacă integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ este convergentă, atunci, evident, ea este convergentă şi în sensul valorii principale Cauchy. Analizând, spre exemplu, integrala improprie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1}dx$ se poate constata că reciproca nu este, în general, adevărată.
b) Există integrale improprii care nu sunt convergente nici în acest sens mai slab. De exemplu, $\int_{-\infty}^{\infty} \cos x dx$ nu este convergentă în sensul valorii principale Cauchy deoarece $\lim_{b\to\infty} \sin b$ nu există.

Definiţia 7.1.5. Fie $A \subset \mathbf{R}$, $J = [\alpha, \beta)$, $\beta \in \overline{R}$ şi $f : A \times J \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietatea că, pentru fiecare $x \in A$, funcţia $t \to f(x, t)$ este impropriu integrabilă pe $[\alpha, \beta)$. Funcţia $F : A \to \mathbf{R}$ definită prin :

$$F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$$

se numeşte *integrala improprie cu parametru*. Având în vedere modul cum s-a definit integrala improprie (definiţia 7.1.1.), rezultă că funcţia F are proprietatea că, pentru orice $x \in A$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ (depinzând de x şi de ε) încât pentru orice $b \in (\beta - \delta, \beta)$ să avem:

$$\left| \int_{a}^{b} f(x,t)dt - F(x) \right| < \varepsilon$$

În acest caz, se mai spune că integrala improprie $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$ *converge simplu (sau punctual), relativ la parametrul x, pe mulțimea A, către funcția F.*

Întărind această proprietate prin cerința ca δ să nu depindă de parametrul x, se obține o condiție de convergență uniformă a integralei improprii cu parametru, foarte utilă în asigurarea transmiterii unor proprietăți ale funcției f, funcției F.

Definiția 7.1.6. Fie $A \subset \mathbf{R}$, $J = [\alpha, \beta)$, $\beta \in \overline{R}$ și $f : A \times J \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea că, pentru fiecare $x \in A$, funcția $t \to f(x, t)$ este integrabilă pe orice interval compact inclus în J. Dacă există o funcție $F : A \to \mathbf{R}$ astfel ca pentru orice $\varepsilon > 0$, să existe $\delta > 0$ (depinzând numai de ε) încât pentru orice $b \in (\beta - \delta, \beta)$ și pentru orice $x \in A$, avem :

$$\left| \int_{a}^{b} f(x,t)dt - F(x) \right| < \varepsilon$$

atunci integrala improprie cu parametrul x, $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$ se numește *uniform convergentă pe mulțimea A către funcția F.*

Observația 7.1.8. a) Pentru a stabili convergența punctuală a unei integrale improprii cu parametru, se pot folosi criteriile de convergență a integralelor improprii, asigurând, în caz de convergență, existența funcției F, fără a o determina efectiv.

b) Pentru a stabili convergența uniformă a unei integrale improprii cu parametru, în general, este greu să verificăm direct condiția din definiția 7.1.6. (presupunând că, în prealabil, ar fi fost determinată punctual funcția F). Apare astfel necesitatea formulării unor criterii de convergență uniformă pentru integrale improprii cu parametru . În continuare formulăm doar un criteriu practic foarte util pentru exerciții.

Teorema 7.1.14. (Criteriul lui Weierstrass) Fie $A \subset \mathbf{R}$, $J = [\alpha, \beta)$, $\beta \in \overline{R}$ şi $f : A \times J \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietatea că, pentru fiecare $x \in A$, funcţia $t \to f(x, t)$ este integrabilă pe orice interval compact inclus în J. Fie $g : J \to \mathbf{R}$ o funcţie pozitivă astfel încât pentru orice $(x, t) \in A \times J$ avem $|f(x,t)| \leq g(t)$, iar integrala $\int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt$ este convergentă. Atunci integrala $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$ converge uniform în raport cu parametrul x pe mulţimea A.

În teoremele care urmează, folosind convergenţa uniformă a integralelor improprii cu parametru sunt stabilite proprietăţi ale acestora care derivă din proprietăţile funcţiei f.

Teorema 7.1.15. Fie $A \subset \mathbf{R}$, $J = [\alpha, \beta)$, $\beta \in \overline{R}$ şi $f : A \times J \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă pe $A \times J$. Dacă integrala $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$ converge uniform în raport cu parametrul x, pe mulţimea A, către funcţia $F : A \to \mathbf{R}$ atunci F este continuă pe A.

Teorema 7.1.16. Fie $A \subset \mathbf{R}$, $J = [\alpha, \beta)$, $\beta \in \overline{R}$ şi $f : A \times J \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă pe $A \times J$, cu derivata parţială în raport cu parametrul x continuă pe $A \times J$. Dacă integrala $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$ converge punctual pe mulţimea A către funcţia $F : A \to \mathbf{R}$, iar integrala $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ converge uniform pe A, atunci F este derivabilă pe A şi are loc egalitatea

$$F'(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

pentru orice $x \in A$. În plus, funcția F' este continuă pe A.

Observația 7.1.9. Această teoremă poate fi folosită la calculul unor integrale improprii ce nu pot fi determinate prin metode elementare.

Teorema 7.1.17. Fie A = [a, b], J = [α, β) $\beta \in \overline{\mathbf{R}}$ și f : A x J $\rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă pe A x J. dacă integrala $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$ converge uniform în raport cu parametrul x pe intervalul [a, b] către funcția F : [a, b] $\rightarrow \mathbf{R}$ atunci F este integrabilă pe [a, b] și are loc egalitatea:

$$\int_{a}^{b} F(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{a}^{b} f(x,t)dx \right] dt$$

Observația 7.1.10. Această teoremă dă condiții suficiente în care putem schimba ordinea de integrare, în cazul când una dintre integrale este improprie iar cealaltă este simplă. În teorema următoare sunt date condiții suficiente în care putem schimba ordinea de integrare în cazul când ambele integrale sunt improprii, dar funcția f păstrează semn constant pe domeniul de definiție.

Teorema 7.1.18. Fie A = [a, b), J = [α, β) $\beta \in \overline{\mathbf{R}}$ și f : A x J $\rightarrow \mathbf{R}$ o funcție pozitivă, continuă pe A x J. Dacă integrala $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$ converge uniform, în raport cu x, pe orice interval compact inclus în A, către funcția F : A $\rightarrow \mathbf{R}$ integrala $\int_{a}^{b} f(x,t)dx$ converge uniform în raport cu t, pe J, către funcția

G : J→**R** iar $\int_{\alpha}^{\beta} G(t)dt$ este convergentă, atunci funcția F este impropriu integrabilă pe [a, b) (adică integrala $\int_{a}^{b} F(x)dx$ este convergentă) și are loc egalitatea:

$$\int_{a}^{b} F(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} G(t)dt,$$

adică $\int_{a}^{b}\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt\right]dx = \int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_{a}^{b} f(x,t)dx\right]dt$

Observația 7.1.11. Dacă funcția f nu păstrează semn constant pe domeniul de definiție, chiar dacă sunt îndeplinite celelalte condiții, în general, concluzia teoremei 7.1.18., nu rămâne valabilă. (vezi exercițiul 7.3.14.)

Teorema 7.1.19. Fie A = [a, b], J = [α, β) β∈ $\overline{R}$ și f : A x J →**R** o funcție continuă pe A x J. dacă $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$ converge uniform în raport cu x, pe orice interval compact inclus în A, $\int_{a}^{b} f(x,t)dx$ converge uniform, în raport cu t, pe orice interval compact inclus în J, și dacă cel puțin una dintre integralele $\int_{a}^{b}\left[\int_{\alpha}^{\beta} |f(x,t)|\,dt\right]dx$, $\int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_{a}^{b} |f(x,t)|\,dx\right]dt$ este convergentă, atunci integralele $\int_{a}^{b}\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt\right]dx$ și $\int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_{a}^{b} f(x,t)dx\right]dt$ există și sunt egale.

7.2. Tipuri de probleme şi metode de rezolvare

Exerciţiul 7.2.1. Să se studieze natura integralei improprii $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ şi să se determine valoarea sa în caz de convergenţă.

În problemele din această categorie se poate determina o primitivă a funcţiei f cu metode elementare şi se poate studia efectiv existenţa limitei din definiţia 7.1.1. sau din formula Leibnitz-Newton. Pentru rezolvare, se procedează astfel:

- se verifică dacă funcţia f este integrabilă pe orice interval compact inclus în $[\alpha, \beta)$;
- se determină o primitivă F a funcţiei f pe intervalul $[\alpha, \beta)$;
- se studiază existenţa limitei $\lim_{x \to \beta} F(x)$;
- dacă această limită este finită, cu formula Leibnitz-Newton se obţine valoarea integralei;
- în unele cazuri, problema se simplifică, aplicând direct formula de integrare prin părţi sau formula schimbării de variabilă.

Exerciţiul 7.2.2. Să se studeize natura integralei improprii $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

O asemenea problemă apare în situaţia în care nu este posibil să se determine o primitivă pentru f, şi, prin urmare, aplicarea directă a definiţiei 7.1.1. sau a formulei Leibnitz-Newton nu este posibilă. Într-o asemenea situaţie nu se mai pretinde a se găsi valoarea integralei în caz de convergenţă. Pentru a preciza natura integralei, se încearcă aplicarea unui criteriu de convergenţă convenabil.

- dacă f are numai valori pozitive, se aplică teorema 7.1.8. sau teorema 7.1.9.;
- dacă f are numai valori negative, se aplică teorema 7.1.8. sau 7.1.9. pentru – f;

- dacă f nu are semn constant pe intervalul de integrare, se studiază convergenţa absolută (utiliyând, după caz, 7.1.8. sau 7.1.9. pentru | f | sau 7.1.12.)
  - dacă integrala este absolut convergentă, atunci ea este şi convergentă;
  - dacă integrala nu este absolut convergentă, nu se poate spune nimic, în general, despre convergenţă; în acest caz se încearcă teorema 7.1.10. sau 7.1.11.
- dacă integrala nu este convergentă în sensul valorii principale Cauchy, atunci ea este divergentă (această afirmaţie se utilizează, evident, în cazul în care integrala improprie se încadrează în condiţiile definiţiei 7.1.3. sau 7.1.4.)

Exerciţiul 7.2.3. Să se determine V • p • $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

- se verifică dacă integrala se încadrează în condiţiile definiţiei 7.1.3. sau 7.1.4. ;
- se determină o primitivă a funcţiei f;
- se calculează, după caz, $\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx$ şi $\int_{c+\varepsilon}^{\beta} f(x)dx$ sau $\int_{-h}^{h} f(x)dx$
- se studiază, după caz, existenţa în $\mathbf{R}$ a limitelor: $\lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{h} f(x)dx\right]$ sau $\lim_{b \to \infty} \int_{-b}^{b} f(x)dx$

Exercițiul 7.2.4. Fie $A \subset \mathbf{R}$, $J = [\alpha, \beta)$, $\beta \in \overline{\mathbf{R}}$ și $f : A \times J \to \mathbf{R}$ o funcție dată. Să se demonstreze că integrala $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$ converge simplu (punctual) pe mulțimea A.

- se presupune $x \in A$ fixat și se aplică un criteriu de convergență convenabil ales
- în unele cazuri mai simple se poate aplica definiția 7.1.1. astfel :
  - pentru $x \in A$ fixat și $b \in [\alpha, \beta)$, se calculează integrala simplă $\int_{\alpha}^{b} f(x,t)dt$;
  - se calculează apoi $\lim_{b \to \beta} \int_{\alpha}^{b} f(x,t)dt$, în caz că există; dacă limita există și este finită, integrala este convergentă, iar limita este tocmai F(x); dacă pentru un $x \in A$ limita, nu există, sau nu este finită, atunci integrala nu este punctual convergentă pe A.

Exercițiul 7.2.5. Fie $A \subset \mathbf{R}$, $J = [\alpha, \beta)$, $\beta \in \overline{R}$ și $f : A \times J \to \mathbf{R}$ o funcție dată. Să se demonstreze că integrala $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$ converge uniform pe mulțimea A.

- dacă este posibil, se determină, pentru fiecare $x \in A$,
  $F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$, apoi se verifică condiția din definiția 7.1.6.
- de obicei se încearcă o majorare
  $$|f(x,t)| \leq g(t) , (x,t) \in A \times J$$

încât $\int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt$ să fie convergentă şi se aplică criteriul lui Weierstrass (teorema 7.1.14.).

Exercițiul 7.2.6. Fie $A \subset \mathbf{R}$, J = [α, β), $\beta \in \overline{R}$ şi f : A x J $\rightarrow \mathbf{R}$ o funcție dată. Fie F : A $\rightarrow \mathbf{R}$, F(x) = $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$. Să se demonstreze că funcția F este continuă pe A.

- se arată că f este continuă pe A x J;
- se arată că integrala $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$ este uniform convergentă pe A, apoi se aplică teorema 7.1.15.

Exercițiul 7.2.7. Fie $A \subset \mathbf{R}$, J = [α, β), $\beta \in \overline{R}$ şi f : A x J $\rightarrow \mathbf{R}$ o funcție dată. Fie F : A $\rightarrow \mathbf{R}$, F(x) = $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$. Să se demonstreze că funcția F este derivabilă pe A şi să se calculeze F.

- se arată că integrala $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$ converge punctual pe A, deci funcția F este bine definită;
- se arată că funcția f este continuă pe A x J;
- se calculează $\frac{\partial f}{\partial x}$;
- se arată că $\frac{\partial f}{\partial x}$ este continuă pe A x J;
- se arată că integrala $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ este uniform convergentă pe A;

- se aplică teorema 7.1.16. şi se obţine

$$F'(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$$

Exerciţiul 7.2.8. Utilizând teorema 7.1.16., să se calculeze $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$, $x \in A$.

- se arată că integrala $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$ converge punctual pe A;
- se notează $F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$, $x \in A$.
- se parcurg etapele de la exerciţiul precedent, obţinându-se:

$$F'(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t), \; x \in A$$

şi se calculează efectiv această integrală (dacă acest lucru nu este posibil, metoda nu este aplicabilă).

- se determină primitivele funcţiei F' , apoi se alege dintre ele acea primitivă care satisface o condiţie convenabil aleasă (dacă se poate determina uşor valoarea y_0 a funcţiei F într-un anume punct $x_0 \in A$, se determină constanta din condiţia $F(x_0) = y_0$; se mai pot folosi condiţii de forma $\lim_{x \to \beta} F(x) = l$)

Exerciţiul 7.2.9. Utilizând teorema 7.1.16. să se calculeze $\int_{\alpha}^{\beta} h(t)dt$, $\beta \in \overline{R}$.

- se arată că integrala este convergentă;
- se caută o funcţie f(x, t) încât să existe x_0 astfel ca $h(t) = f(x_0, t)$, $t \in [\alpha, \beta)$;

- ca în exercițiul 7.2.8., se determină $F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$;
- se înlocuiește x cu x_0 și se obține:

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(t)dt = F(x_0)$$

Exercițiul 7.2.10. Dacă $f : [a, b] \times [\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$, $\beta \in \overline{\mathbf{R}}$, este o funcție dată, să se compare numerele: $\int_a^b \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt \right] dx$, $\int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_a^b f(x,t)dx \right] dt$.

- în cazuri simple, se determină efectiv aceste numere, calculând, pe rând, integralele care apar,
- în cazul în care una dintre integrale nu se poate calcula prin metode elementare, se aplică teorema 7.1.17. , astfel:
  - se arată că f este continuă pe [a, b] x [α, β) ;
  - se arată că integrala $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$ converge uniform pe [a, b];
  - se deduce că cele două numere sunt egale.

Exercițiul 7.2.11. Dacă $f : [a, b) \times [\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$, $\beta \in \overline{\mathbf{R}}$, este o funcție dată, să se compare numerele: $\int_a^b \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt \right] dx$, $\int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_a^b f(x,t)dx \right] dt$.

- atunci când este posibil, se calculează prin metode elementare integralele improprii care apar, determinându-se astfel efectiv aceste numere;
- dacă funcția f are semn constant pe [a, b) x [α, β), se încearcă aplicarea teoremei 7.1.18., astfel:
  - se arată că f este continuă pe [a, b) x [α, β);

- se arată că integrala $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$ converge uniform pe orice interval compact inclus în [a, b);
- se arată că integrala $\int_{a}^{b} f(x,t)dt$ converge uniform pe [α, β);
- se arată că integrala improprie $\int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_{a}^{b} f(x,t)dx\right]dt$ este convergentă;
- din teorema 7.1.18. rezultă că şi integrala $\int_{a}^{b}\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt\right]dx$ este convergentă şi că cele două numere sunt egale.

- dacă funcţia f, nu are semn constant pe [a, b) x [α, β), se aplică teorema 7.1.19.

Exerciţiul 7.2.12. Utilizând teorema 7.1.17. sau 7.1.18. să se calculeze $\int_{\alpha}^{\beta} h(t)dt$, $\beta \in \overline{\mathrm{R}}$.

- se încearcă scrierea lui h(t) sub forma h(t) = $\int_{a}^{b} f(x,t)dt$ unde f este o funcţie continuă;
- se utilizează schimbarea ordinii de integrare.

Exercițiul 7.2.13. Să se exprime valoarea unei integrale improprii $\int_{\alpha}^{\beta} h(t)dt$ convergente, cu ajutorul valorii funcției Γ sau ale funcției B (vezi exercițiile 7.3.5 și 7.3.6.)

- se utilizează o schimbare de variabilă convenabilă t = φ(s) încât $h(\varphi(s))\cdot\varphi'(s) = s^{x_0}\cdot e^{-s}$ (pentru un anume $x_0 > 0$), $\lim_{s\to 0}\varphi(s) = \alpha$, $\lim_{s\to\infty}\varphi(s) = \beta$. În acest caz se obține
$$\int_{\alpha}^{\beta} h(t)dt = \Gamma(x_0);$$
- se utilizează o schimbare de variabilă convenabilă t = φ(s) încât $h(\varphi(s))\cdot\varphi'(s) = s^{x_0-1}\cdot(1-s)^{y_0-1}$ pentru anume $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, $\lim_{s\to 0}\varphi(s) = \alpha$, $\lim_{s\to 1}\varphi(s) = \beta$. În acest caz
$$\int_{\alpha}^{\beta} h(t)dt = B(x_0, y_0)$$

7.3. Exerciții rezolvate

Exercițiul 7.3.1. Să se studieze natura următoarelor integrale improprii și să se determine valorile acestora, în caz de convergență:

a) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $\int_{0}^{1}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$

c) $\int_{3/\pi}^{\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$

d) $\int_{0}^{\infty}\cos x dx$

e) $\int_{0}^{\infty}e^{-ax}\sin xbxdx$, a > 0, b∈ **R**

e) $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}$

Soluții. a) Funcția f : (-1, 1) $\to \mathbf{R}$, f(x) = $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ este integrabilă pe orice interval compact [a, b] $\subset$(-1, 1), fiind continuă. Deoarece F(x) = arcsin x este o primitivă pentru f, rezultă că

$\int_a^b f(x)dx$ = arcsin b – arcsin a.

Deoarece $\lim_{\substack{b\to 1\\ b<1}}$ arcsin b = $\dfrac{\pi}{2}$; $\lim_{\substack{a\to -1\\ a>-1}}$ arcsin a = $-\dfrac{\pi}{2}$, rezultă că

$\int_{-1}^{1} f(x)dx$ este convergentă şi valoarea sa este $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$.

b) Funcția f : (0, 1) $\to \mathbf{R}$, f(x) = $\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$ este integrabilă pe orice interval compact inclus în (0, 1), fiind continuă. Deoarece $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}$ f(x) = 1, funcția poate fi prelungită prin continuitate în x = 0, prin urmare integrala este neesențial improprie la acest capăt. Cum $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}$ f(x) = ∞, integrala este improprie în limita superioară. Deoarece F(x) = $(\arcsin\sqrt{x}\,)^2$ este o primitivă a funcției f. deducem imediat că integrala este convergentă şi

$\int_0^1 f(x)dx = \dfrac{\pi^2}{4}$.

Cu schimbarea de variabilă $\arcsin\sqrt{x}$ = t se poate deduce imediat

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\pi/2} 2tdt = t^2\Big|_0^{\pi/2} = \dfrac{\pi^2}{4}$.

c) Cu formula Leubnitz-Newton obținem imediat:

$$\int_{3/\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = \cos\frac{1}{x}\Big|_{3/\pi}^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x} - \cos\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

d) $\int_0^{\infty} \cos x dx$ este divergentă, deoarece primitiva F(x) = sin x nu are limită la ∞.

e) Funcţia f: [0, ∞)$\to\mathbf{R}$, f(x) = $e^{-ax}\cdot\sin bx$ este continuă pe [0, ∞), deci este integrabilă pe orice interval compact inclus în [0, ∞). Integrând de două ori prin părţi, se obţine primitiva F(x) = $-\frac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2+b^2}\cdot e^{-ax}$, x$\in$ (0, ∞). Cum a > 0, rezultă că $\lim_{x\to\infty} e^{-ax} = 0$ şi cum

$$\left|-\frac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2+b^2}\right| \le \frac{a+|b|}{a^2+b^2}$$

pentru orice x$\in$ [0, ∞), deducem că $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$. Rezultă că integrala dată este convergentă. Deoarece F(0) = $-\frac{b}{a^2+b^2}$, rezultă

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(0) = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

f) Funcţia f: [0, ∞)$\to\mathbf{R}$, f(x) = $\frac{1}{1+x^4}$ este continuă pe [0, ∞) deci este integrabilă pe orice interval compact inclus în [0, ∞). Utilizând descompunerea în fracţii simple:

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{1+\sqrt{2}x+x^2} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{1-\sqrt{2}x+x^2},\ x\in[0,\infty)$$

se obține primitiva F(x) =

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left[arctg\left(\sqrt{2}x+1\right)+arctg\left(\sqrt{2}x-1\right)\right]+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

Deoarece $\lim_{x\to\infty} F(x)=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ și F(0) = 0, rezultă că integrala este convergentă și valoarea sa este $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Exercițiul 7.3.2. Să se studeize natura următoarelor integrale improprii:

a) $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^3}dx$

b) $\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

c) $\int_0^1 \ln^2 x dx$

d) $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$

e) $\int_0^1\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx$

f) $\int_a^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx, a>0$

g) $\int_1^{\infty}\frac{x^2}{\left(3+\frac{1}{x}\right)^x}dx$

Soluții. a) Funcția f : [1, ∞)→**R** , f(x) = $\frac{\cos x}{x^3}$ este continuă, deci este integrabilă pe orice interval compact inclus în [1, ∞). Deoarece $\lim_{x\to\infty} x^2\cdot|f(x)|=\lim_{x\to\infty}\frac{|\cos x|}{x}=0$, din teorema 7.1.8., ($\lambda$ = 2, l = 0)

deducem că integrala $\int_1^{\infty} |f(x)|\,dx$ este convergentă, deci integrala $\int_1^{\infty} f(x)dx$ este absolut convergentă.

b) Funcția $f : (a, b) \to \mathbf{R}^+$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ este continuă pe (a, b), deci este integrabilă pe orice interval compact inclus în (a, b). Considerăm $c \in (a, b)$ arbitrar. Integrala $\int_a^c f(x)dx$ este convergentă deoarece

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} (x-a)^{\frac{1}{2}} \cdot f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{1}{\sqrt{b-x}} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$$

(teorema 7.1.9., $\lambda = \frac{1}{2} < 1, l = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$)

Integrala $\int_c^b f(x)dx$ este, de asemenea, convergentă, deoarece

$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} (b-x)^{\frac{1}{2}} \cdot f(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$. Rezultă că $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

c) Funcția $f : (0, 1] \to \mathbf{R}^+$, $f(x) = \ln^2 x$ este integrabilă pe orice interval compact inclus în (0, 1], fiind continuă. Deoarece pentru orice $\lambda \in (0, 1)$,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^{\lambda} \cdot f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x^{\lambda}}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{\lambda}{x^{\lambda+1}}} = -\frac{2}{\lambda} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^{\lambda}}} =$$

$$= -\frac{2}{\lambda}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\lambda}{x^{\lambda+1}}} = \frac{2}{\lambda^2}\lim_{x\to 0} x^{\lambda} = 0,$$

rezultă că integrala este convergentă.

d) Funcția $f : [2, \infty) \to \mathbf{R}^+$, $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ este continuă, deci integrabilă pe orice interval compact inclus în $[2, \infty)$. Cu schimbarea $\ln x = t, x \in [2, \infty)$, se obține:

$$\int_2^b \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_{\ln 2}^{\ln b} = \ln(\ln b) - \ln(\ln 2).$$

Deoarece $\lim_{b\to\infty} \ln(\ln b) = \infty$, rezultă că integrala $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ este divergentă.

e) Încercăm să aplicăm teorema 7.1.11. deoarece funcția de integrat nu are semn constant. Pentru orice $x \in (0, 1]$, avem :

$$f(x) = \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} = x \cdot \left(\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\right)$$

Deoarece funcția $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$ este continuă pe $(0, 1]$ și admite primitiva $\Phi(x) = -\sin\dfrac{1}{x}$, care este, evident, mărginită. Putem aplica teorema 7.1.11. pentru $\lambda = 1$ și deducem că $\int_0^1 f(x)dx$ este convergentă.

f) Aplicând teorema 7.1.10. pentru $\varphi(x) = \cos x$ și $\lambda = 1$, rezultă că integrala $\int_a^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ *este convergentă.* Această integrală *nu este însă absolut*

convergentă. Dacă $\int_a^{\infty} \frac{|\cos x|}{x} dx$ ar fi convergentă, din criteriul comparației ar rezulta că și $\int_a^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x} dx$ este convergentă, adică integrala $\int_a^{\infty} \frac{1+\cos 2x}{2x} dx$ este convergentă. Cum integrala $\int_a^{\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$ este, evident, convergentă (teorema 7.1.6. pentru $\varphi(x) = \cos 2x$, $\lambda = 1$), din proprietatea de liniaritate ar rezulta că integrala $\int_a^{\infty} \frac{dx}{2x}$ este convergentă, ceea ce este, evident, fals.

g) Deoarece $\lim_{x\to\infty} |f(x)|^{1/x} = \frac{1}{3} < 1$, din teorema 7.1.12., rezultă că integrala este convergentă.

Exercițiul 7.3.3. Să se calculeze $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx$ (integrala lui Euler)

Soluție. Deoarece pentru orice $\lambda > 0$ avem :

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x^{\lambda}}} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{\lambda}{x^{\lambda-1}}} = \frac{1}{\lambda} \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \cos x \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot x^{\lambda} = 0$$

aplicând teorema 7.1.9. pentru $\lambda < 1$, $l = 0$ și $f(x) = -\ln \sin x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, deducem că integrala este convergentă. Fie $I \in \mathbf{R}$, $I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx$.

Cu substituția $x = 2t$, obținem:

$$I = 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin 2t dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin t dt + 2\int_0^{\pi/4} \ln\cos t dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin t dt + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\sin u du = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I$$

Rezultă $I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

(Egalitatea $\int_0^{\pi/4} \ln\cos t dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\sin u du$ se obține punând $t = \frac{\pi}{2} - u$)

Exercițiul 7.3.4. Să se demonstreze că integrala $\int_{-\pi/4}^{\pi/3} ctgx dx$ este divergentă, dar converge în sensul valorii principale Cauchy.

Soluție. $\int_{-\pi/4}^{\pi/3} ctgx dx = \int_{-\pi/4}^{0} ctgx dx + \int_0^{\pi/3} ctgx dx$

Funcția f(x) = ctg x este continuă pe $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \setminus \{0\}$, deci este integrabilă pe orice interval compact inclus în $\left[\frac{\pi}{4}, 0\right)$ sau $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$ şi admite primitiva F(x) = ln |sin(x)| care însă nu are limită în x = 0. Prin urmare, integrala dată este divergentă.

Deoarece $\lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_{-\pi/4}^{-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\varepsilon}^{\pi/3} f(x)dx\right] =$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\ln\sin\varepsilon - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\sin\varepsilon\right] = \ln\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} \in \mathbf{R}$$

rezultă că integrala dată converge în sensul valorii principale Cauchy şi avem:

$$V \bullet p \bullet \int_{-\pi/4}^{\pi/3} ctgxdx = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Exercițiul 7.3.5. Fie $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty)$ funcția definită prin $f(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$. Să se demonstreze că integrala $\int_0^{\infty} f(x,t)dt$ converge simplu (punctual) pe $(0, \infty)$.

Soluție. Pentru orice $(x, t) \in (0, \infty) \times (0, 1]$ avem $0 < f(x, t) \leq t^{x-1}$. Cum $\int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}$, rezultă că, pentru fiecare $x \in (0, \infty)$, funcția $t \to f(x, t)$ este impropriu integrabilă pe $(0, \infty)$, deci integrala $\int_0^{\infty} f(x,t)dt$ este punctual convergentă pe $(0, \infty)$.

Observația 7.3.1. Se poate defini funcția $\Gamma : (0, \infty) \to (0, \infty)$ prin $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$, cunoscută sub numele de *funcția "gama" a lui Euler.*

Exercițiul 7.3.6. Fie $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, 1) \to (0, \infty)$ funcția definită prin $f(x, y, t) = t^{x-1}(1 - t)^{y-1}$. Să se demonstreze că integrala $\int_0^1 f(x,y,t)dt$ converge simplu (punctual) pe $(0, \infty) \times (0, \infty)$.

Soluție. Fie $g : (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, 1) \to (0, \infty)$ funcția definită prin $g(x, y, t) = t^{x-1} + (1 - t)^{y-1}$. Fie $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ fixat. Dacă

$t \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, atunci $(1 - t)^{y-1} \leq 2$, deci $t^{x-1}(1 - t)^{y-1} \leq 2t^{x-1} \leq 2g(x, y, t)$, iar dacă $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, atunci $0 < t^{x-1} = t^x \frac{1}{t} \leq 2$ deci $t^{x-1}(1 - t)^{y-1} \leq 2(1-t)^{y-1} \leq 2g(x, y, t)$.

Deci, pentru orice $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ şi orice $t \in (0, 1)$, $f(x, y, t) \leq 2g(x, y, t)$.

Cum $\int_0^1 g(x,y,t)dt = \int_0^1 t^{x-1}dt + \int_0^1 (1-t)^{y-1}dt = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$,

rezultă că funcția $t \to f(x, y, t)$ este impropriu integrabilă pe $(0, 1)$, deci integrala $\int_0^1 f(x,y,t)dt$ este punctual convergentă pe $(0, \infty) \times (0, \infty)$.

Observația 7.3.2. Din exercițiul 9.3.6. rezultă că se poate defini integrala improprie cu doi parametrii, $B : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty)$ prin

$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ cunoscută sub numele de *funcția "beta" a lui Euler.*

Exercițiul 7.3.7. Să se demonstreze că integrala $\int_0^\infty \frac{xdt}{1+t^2x^2}$, $x \in \mathbf{R}$ converge punctual, dar nu converge uniform pe $\mathbf{R}$.

Soluție. Fie $x \in \mathbf{R}$ fixat şi $b < \infty$. Evident,

$$\int_0^b \frac{xdt}{1+t^2x^2} = \operatorname{arctg}(tx)\Big|_{t=0}^{t=b} = \operatorname{arctg} bx .$$

Deoarece $\lim_{b\to\infty}\int_0^{\sim}\frac{xdt}{1+t^2x^2} = \lim_{b\to\infty}$ arctg bx = $\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \text{daca } x>0\\ 0, & \text{daca } x=0\\ -\frac{\pi}{2}, & \text{daca } x<0\end{cases}$ rezultă

că integrala dată converge punctual pe $\mathbf{R}$. Putem defini F :$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ prin:

$$F(x) = \int_0^{\infty}\frac{xdt}{1+t^2x^2} = \begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \text{daca } x>0\\ 0, & \text{daca } x=0\\ -\frac{\pi}{2}, & \text{daca } x<0\end{cases}$$

Să observăm că funcţia F este discontinuă în x = 0. Funcţia

f :$\mathbf{R}$ x (0, ∞) $\to\mathbf{R}$, f(x, t)= $\frac{x}{1+t^2x^2}$ este, evident,continuă pe $\mathbf{R}$ x (0, ∞)

Dacă integrala ar fi uniform convergentă pe $\mathbf{R}$, aplicând teorema 7.1.15., ar rezulta că F este continuă pe $\mathbf{R}$, ceea ce este fals. Rezultă că integrala dată nu este uniform convergentă pe $\mathbf{R}$.

Exerciţiul 7.3.8. Fie f : [0, ∞) x (0, ∞)$\to\mathbf{R}$, f(x, t) = $\frac{arctgxt}{t(1+t^2)}$.

a) Să se demonstreze că integrala $\int_0^{\infty} f(x,t)dt$ este uniform convergentă pe [0, ∞).

b) Dacă F : [0, ∞)$\to\mathbf{R}$ este definită prin F(x) = $\int_0^{\infty} f(x,t)dt$ să se demonstreze că F este continuă pe [0, ∞).

Soluţie. a) Deoarece putem scrie: $\int_0^{\infty} f(x,t)dt = \int_0^{1} f(x,t)dt +$

$\int_1^{\infty} f(x,t)dt$ şi $\lim_{t\to 0} \frac{arctgxt}{t(1+t^2)} = x$, rezultă că integrala dată are aceeaşi

natură cu integrala $\int_1^{\infty} f(x,t)dt$.

Deoarece, pentru orice (x, t)∈ [0, ∞) x [1, ∞), avem:

$$0 \le f(x, t) \le \frac{\pi}{2}\frac{1}{t(1+t^2)} < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{t^3}$$

şi $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^3}$ este convergentă, aplicând criteriul lui Weierstrass, deducem că integrala dată este uniform convergentă.

b) este suficient să observăm că funcţia f este continuă, fiind compunere de funcţii continue şi să ţinem seama de a) şi de teorema 7.1.15.

Exeercitiul 7.3.9. Să se demonstreze că funcţia $\Gamma : (0, \infty) \to (0, \infty)$ definită prin $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ este derivabilă pe (0, ∞) şi

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t} \ln t dt .$$

Soluţie. Din exerciţiul 7.3.5. deducem că funcţia Γ este bine definită. Notând $f(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$, (x, t) ∈ (0, ∞) x (0, ∞) rezultă că:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = t^{x-1}e^{-t}\ln t, (x, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$$

şi că $\frac{\partial f}{\partial x}$ este continuă pe (0, ∞) x (0, ∞), fiind produs de funcţii continue.

Fie acum a,b $\in (0, \infty)$ arbitrare, fixate. Demonstrăm că integrala $\int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ este uniform convergentă pe (a, b]. Pentru aceasta, este suficient să demonstrăm convergenţa uniformă a integralelor $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\ln t dt$ şi $\int_1^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln t dt$ pe (a, b]. Dacă x > 1 prima integrală este o integrală simplă. Dacă $a < x \leq 1$, scriem:

$$t^{x-1}e^{-t}\ln t = \frac{t^{x-a}e^{-t}\ln t}{t^{\lambda}}, \text{ unde } \lambda = 1 - a < 1$$

Deoarece , pentru orice $x \in (a, 1]$ şi $t \in (0, 1]$ avem:

$$|t^{x-1}e^{-t}\ln t| = -\frac{t^{x-a}e^{-t}\ln t}{t^{\lambda}} < \frac{1}{t^{\lambda}}$$

şi $\int_0^1 \frac{dt}{t^{\lambda}}$ este convergentă (deoarece $\lambda < 1$) deducem că $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\ln t dt$ este uniform convergentă. Pentru convergenţa celei de a doua integrale, se observă că:

$$t^{x-1}e^{-t}\ln t = \frac{t^{x+1}e^{-t}\ln t}{t^2} \leq M \cdot \frac{1}{t^2},$$

$x \in (a, b)$, $t \in [1, \infty)$, unde $M > 0$ este convenabil ales ($t^{x+1}e^{-t}\ln t < t^{b+1}e^{-t}\ln t$ iar $\lim_{t\to\infty} t^{b+1}e^{-t}\ln t = 0$).

Cum $\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ este convergentă, rezultă că integrala $\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln t dt$ este uniform convergentă pe (a, b).

Prin urmare, integrala $\int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ este uniform convergentă pe (a, b). Aplicând teorema 7.1.16., deducem că funcţia Γ este derivabilă cu

derivata continuă pe (a, b). dar a,b fiind oarecare, deducem că Γ este derivabilă cu derivata continuă pe $(0, \infty)$ şi avem :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t dt \, , \, x \in (0, \infty).$$

Exerciţiul 7.3.10. Utilizând teorema 7.1.16., să se calculeze

$$\int_0^{\infty} \frac{arctgxt}{t(1+t^2)} dt \, , \, x \geq 0.$$

Soluţie. Fie $F : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $F(x) = \int_0^{\infty} \frac{arctgxt}{t(1+t^2)} dt$. Din exerciţiul 7.3.8. deducem că funţia F este bine definită.

Funcţia $f : [0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x, t) = \frac{arctgxt}{t(1+t^2)}$ este continuă, fiind compunere de funcţii continue. Ea este derivabilă parţial în raport cu parametrul x şi avem :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{t(1+t^2)} \cdot \frac{1}{1+x^2t^2} \cdot t = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)},$$

$$(x, t) \in [0, \infty) \times (0, \infty).$$

Evident, $\frac{\partial f}{\partial x}$ este continuă pe $[0, \infty) \times (0, \infty)$. Deoarece, pentru orice $(x, t) \in [0, \infty) \times (0, \infty)$ avem :

$$0 < \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) < \frac{1}{1+t^2} \text{ şi}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = arctg\, t\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2},$$

aplicând criteriul lui Weierstrass, deducem că $\int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ este uniform convergentă pe $[0, \infty)$. Din teorema 7.1.16., deducem că F este derivabilă şi că $F(x) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$, $x \in [0, \infty)$.

Descompunând în fracţii simple, pentru $x \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ obţinem:

$$F(x) = \frac{1}{1-x^2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} - \frac{x^2}{1-x^2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+x^2t^2} =$$

$$= \frac{1}{1-x^2}arctgt\Big|_0^{\infty} - \frac{x}{1-x^2}arctg(xt)\Big|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{x}{1-x^2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+x}$$

Cum $F(0) = \int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$, $F(1) = \int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{4}$, deducem că

$$F(x) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+x}, \text{ pentru orice } x \in [0, \infty).$$

Deoarece $\int \frac{\pi}{2}\cdot\frac{dx}{1+x} = \frac{\pi}{2}\ln(1+x) + c$ şi $F(0) = 0$, rezultă

$$F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x).$$

Exerciţiul 7.3.11. Utililzând teorema 7.1.16., să se calculeze

$$\int_0^{\infty}\frac{arctgt}{t(1+t^2)}dt.$$

Soluţie. Deoarece $\int_0^{\infty} \frac{arctgt}{t(1+t^2)}dt = \int_0^{1} \frac{arctgt}{t(1+t^2)}dt + \int_1^{\infty} \frac{arctgt}{t(1+t^2)}dt$,

$\lim_{t\to 0} \frac{arctgt}{t(1+t^2)} = 1$, $\frac{arctgt}{t(1+t^2)} \le \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{t^3}$, t ∈ (1, ∞) şi $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^3}$ este convergentă, rezultă că integrala dată este convergentă. Introducând parametrul x, considerăm

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{arctgxt}{t(1+t^2)}dt \text{ , } x \ge 0$$

care se calculează utilizând teorema 7.1.16., şi se obţine

$$F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x) \text{ , } x \ge 0 \text{ (exerciţiul 7.3.10.)}$$

Evident, $\int_0^{\infty} \frac{arctgt}{t(1+t^2)}dt = F(1) = \frac{\pi}{2}\ln 2$.

Exerciţiul 7.3.12. Fie f:[a, b] x [0, ∞)→**R**, f(x, t) = e^{-t} sin tx. Să se demonstreze că :

$$\int_a^b \left[\int_0^{\infty} f(x,t)dt\right]dx = \int_0^{\infty}\left[\int_a^b f(x,t)dx\right]dt.$$

Soluţie. Funcţia f este continuă, fiind compunere de funcţii continue. Integrala $\int_0^{\infty} e^{-t}\sin xtdt$ este uniform convergentă pe [a, b], deoarece | e^{-t} sin tx | ≤ e^{-t}, pentru orice (x, t)∈ [a, b]x[0, ∞),iar $\int_0^{\infty} e^{-t}dt = 1$.

Din teorema 7.1.17. rezultă egalitatea.

Exercițiul 7.3.13. Utilizând teorema 7.1.17., să se calculeze

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} \cdot e^{-t} dt .$$

Soluție. Deoarece $\lim_{t \to 0} \frac{\cos at - \cos bt}{t} \cdot e^{-t} = 0$, integrala este improprie doar în limita superioară. Deoarece $\lim_{t \to \infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} = 0$ rezultă că $\left| \frac{\cos at - \cos bt}{t} \cdot e^{-t} \right| \leq M \cdot e^{-t}$, cu M > 0 convenabil ales, iar $\int_0^{\infty} e^{-t} dt$ este convergentă, rezultă că integrala dată este absolut convergentă, deci și convergentă. Pentru calcul, observăm mai întâi că:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} \cdot e^{-t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{t} \Big|_{x=b}^{x=a} \cdot e^{-t} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\int_b^a -\sin xt dx \right] \cdot e^{-t} dt = \int_0^{\infty} \left[\int_a^b e^{-t} \sin xt dx \right] dt =$$

$$= \int_a^b \left[\int_0^{\infty} e^{-t} \sin xt dt \right] dx .$$

Ultima egalitate a fost obținută în exercițiul precedent, utilizând teorema 7.1.17. Pentru x∈ [a, b] fixat, calculăm:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \sin xt dt = -\int_0^{\infty} (e^{-t})' \sin xt dt = -e^{-t} \sin xt \Big|_{t=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} (\cos xt) x dt$$

$$= -x \int_0^{\infty} (e^{-t})' \cos xt dt = -x \left[e^{-t} \cos xt \Big|_{t=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-t} (-\sin xt) x dt \right] =$$

$$= -x\left[-1+x\int_0^{\infty} e^{-t}\sin xtdt\right] = x - x^2\int_0^{\infty} e^{-t}\sin xtdt .$$

Prin urmare, $\int_0^{\infty} e^{-t}\sin xtdt = \frac{x}{1+x^2}$, x ∈ [a, b]. Deci,

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos at-\cos bt}{t}\cdot e^{-t}dt = \int_a^b \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_a^b = \frac{1}{2}\ln\frac{1+b^2}{1+a^2}$$

Exercițiul 7.3.14. Fie f:[1, ∞) x [1, ∞) →**R** funcția definită prin :

$$f(x, t) = \frac{x-t}{(x+t)^3}.$$

Demonstrați că : $\int_1^{\infty}\left[\int_1^{\infty} f(x,t)dt\right]dx \neq \int_1^{\infty}\left[\int_1^{\infty} f(x,t)dx\right]dt .$

Soluție. Deoarece | f(x, t) | ≤ $\frac{1}{t^2}$, pentru orice (x,t)∈ [1, ∞)x[1, ∞),

integrala $\int_1^{\infty} f(x,t)dt$ este uniform convergentă în raport cu parametrul x∈ [1, ∞).

Prin calcul direct, obținem:

$$\int_1^{\infty} f(x,t)dt = -\int_1^{\infty}\frac{t-x}{(t+x)^3}dt = -\int_1^{\infty}\frac{dt}{(t+x)^2} + 2x\int_1^{\infty}\frac{dt}{(t+x)^3} =$$

$$= \frac{1}{t+x}\Big|_{t=1}^{\infty} - x\cdot\frac{1}{(t+x)^2}\Big|_{t=1}^{\infty} = -\frac{1}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)^2},$$

x∈ [1, ∞).

Prin urmare,

$$\int_1^{\infty}\left[\int_1^{\infty} f(x,t)dt\right]dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{(1+x)^2}dx = \frac{1}{1+x}\Big|_{x=1}^{\infty} = -\frac{1}{2}.$$

Deoarece $|f(x,t)| \le \frac{1}{x^2}$ pentru orice $(x,t)\in[1,\infty)x[1,\infty)$, integrala $\int_1^{\infty} f(x,t)dt$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $t\in[1,\infty)$. Prin calcul direct, obținem:

$$\int_1^{\infty} f(x,t)dt = \int_1^{\infty}\frac{x-t}{(x+t)^3}dx = \int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+t)^2} - 2t\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+t)^3} =$$

$$= -\frac{1}{x+t}\Big|_{x=1}^{\infty} + t\cdot\frac{1}{(x+t)^2}\Big|_{x=1}^{\infty} = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2},$$

$t\in[1,\infty)$,

de unde $\int_1^{\infty}\left[\int_1^{\infty} f(x,t)dx\right]dt = \int_1^{\infty}\frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{1}{1+t}\Big|_1^{\infty} = \frac{1}{2}$.

Să observăm că funcția f nu păstrează un semn constant pe $[1,\infty)x[1,\infty)$, deci teorema 7.1.18. nu este aplicabilă, chiar dacă toate celelalte ipoteze sunt satisfăcute.

Exercițiul 7.3.15. Utilizând teorema 7.1.17.,să se calculeze

$$\int_0^1 \frac{arctgx}{x\sqrt{1-x^2}}dx$$

Soluție. Deoarece $\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x\sqrt{1-x^2}} = 1$, integrala este improprie doar în limita superioară.

Deoarece $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{arctgx}{x\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$, aplicând teorema 7.1.9.., pentru $\lambda=\frac{1}{2}$ şi $l=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$, deducem că integrala este convergentă.

Pentru calcul, observăm mai întâi că:

$$\frac{arctgx}{x}=\int_0^1\frac{dt}{x^2t^2+1},\ x\in(0,\infty).$$

Prin urmare $\int_0^1\frac{arctgx}{x\sqrt{1-x^2}}dx=$

$$\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\int_0^1\frac{dt}{x^2t^2+1}\right)dx=\int_0^1\left[\int_0^1\frac{dt}{(x^2t^2+1)\sqrt{1-x^2}}\right]dx$$

Deoarece $\frac{1}{(x^2t^2+1)\sqrt{1-x^2}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pentru orice $(x,t)\in[0,1)\times[0,1)$ şi $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}$, rezultă că $\int_0^1\frac{dx}{(x^2t^2+1)\sqrt{1-x^2}}$ este uniform convergentă în raport cu parametrul t. Prin urmare, se poate schimba ordinea de integrare şi obţinem :

$$\int_0^1\frac{arctgx}{x\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^1\left[\int_0^1\frac{dt}{(x^2t^2+1)\sqrt{1-x^2}}\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^1\frac{dx}{(x^2t^2+1)\sqrt{1-x^2}}\right]dt=\int_0^1\left[\int_0^{\pi/2}\frac{du}{1+t^2\sin^2u}\right]dt=$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{\infty} \frac{dv}{1+(1+t^2)v^2} \right] dt = \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot arctg\left(v \cdot \sqrt{1+t^2} \Big|_0^{\infty} \right) \right] dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \frac{\pi}{2} \ln\left(t + \sqrt{1+t^2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{2}).$$

Exercițiul 7.3.16. Fie f:[0, ∞) x [0, ∞) $\to \mathbf{R}^+$, f(x, t) = $xe^{-x^2(1+t^2)}$.

a) Demonstrați că $\int_a^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(x,t)dt \right] dx = \int_0^{\infty} \left[\int_a^{\infty} f(x,t)dx \right] dt$, pentru orice a > 0

b) Deduceți că $\int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(x,t)dt \right] dx = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(x,t)dx \right] dt$

c) Demonstrați că: $\int_a^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (integrala lui Euler-Poisson)

Soluție. a) Utilizând teorema 7.1.18. , deoarece f este pozitivă și satisface condițiile:

- f este, evident, continuă pe [0, ∞) x [0, ∞) ;
- $\int_0^{\infty} f(x,t)dt$ este uniform convergentă pe orice interval compact

  [α, β] ⊂ [a, b], deoarece f(x, t) ≤ $\beta e^{-\alpha^2(1+t^2)}$, x∈ [α, β],

  t∈ [0, ∞) iar $\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2(1+t^2)} dt$ este convergentă

- $\int_a^{\infty} f(x,t)dt$ este uniform convergentă pe [0, ∞) deoarece

  $f(x, t) \le x\, e^{-x^2}$, pentru orice $x \in [a, \infty)$, $t \in [0, \infty)$, iar integrala

  $\int_a^{\infty} xe^{-x^2}$ este convergentă;

- $\int_0^{\infty}\left[\int_a^{\infty} f(x,t)dx\right]dt$, a > 0, este convergentă deoarece:

$$\int_0^{\infty}\left[\int_a^{\infty} f(x,t)dx\right]dt = \int_0^{\infty}\frac{1}{2(1+t^2)}\cdot e^{-a^2(1+t^2)}dt,$$

$$\frac{1}{2(1+t^2)}\cdot e^{-a^2(1+t^2)} < \frac{1}{2(1+t^2)},\ t \in [0, \infty) \text{ şi}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{2(1+t^2)}dt = \frac{1}{2}arctgt\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Rezultă: $\int_a^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(x,t)dt\right]dx = \int_0^{\infty}\left[\int_a^{\infty} f(x,t)dx\right]dt$ pentru orice a > 0.

b) Deoarece $g(a, t) = \int_a^{\infty} f(x,t)dx = \frac{1}{2(1+t^2)}\cdot e^{-a^2(1+t^2)}$, $a \in [0, \infty)$,

$t \in [0, \infty)$ este continuă, iar integrala $\int_0^{\infty} g(a,t)dt$ este uniform

convergentă pe [0, ∞), fiind majorată de integrala improprie convergentă

$\int_0^{\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)}$, rezultă că $\lim_{a\to 0} \int_0^{\infty} \left[\int_a^{\infty} f(x,t)dx \right] dt = \lim_{a\to 0} \int_0^{\infty} g(a,t)dt =$

$\int_0^{\infty} g(0,t)dt = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(x,t)dx \right] dt.$

Trecând acum la limită când a → 0 în egalitatea stabilită la a) rezultă:

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(x,t)dt \right] dx = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(x,t)dx \right] dt.$$

c) Evaluăm pe rând integralele care apar în egalitatea stabilită la punctul b):

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(x,t)dt \right] dx = \int_0^{\infty} \left[xe^{-x^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2t^2} dt \right] dx =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x^2} \left(\int_0^{\infty} e^{-u^2} du \right) dx = \left(\int_0^{\infty} e^{-u^2} du \right) \cdot \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right).$$

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(x,t)dx \right] dt = \int_0^{\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2} arctgt \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Prin urmare $\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \frac{\pi}{4}$, de unde rezultă imediat egalitatea cerută.

Exercițiul 7.3.17. Folosind funcțiile "beta" și "gama", să se calculeze:

a) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1} dx, p,q,m > 0$

b) $\int_0^{\infty} x^p e^{-x^q} dx, p > -1, q > 0.$

Soluţie. a) Cu schimbarea de variabilă $x^m = t$, rezultă:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx = \int_0^1 t^{\frac{p-1}{m}}(1-t)^{q-1}\cdot\frac{1}{m}t^{\frac{1}{m}-1}dt =$$

$$= \frac{1}{m}\int_0^1 t^{\frac{p}{m}-1}(1-t)^{q-1}dt = \frac{1}{m}B(\frac{p}{m},q).$$

b) Cu schimbarea de variabilă $x^q = t$, obţinem :

$$\int_0^\infty x^p e^{-x^q}dx = \int_0^\infty t^{\frac{p}{q}}\cdot e^{-t}\cdot\frac{1}{q}\cdot t^{\frac{1}{q}-1}dt = \frac{1}{q}\int_0^\infty t^{\frac{p+1}{q}-1}\cdot e^{-t}dt = \frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right)$$

7.4. Exerciţii propuse

Exerciţiul 7.4.1. Să se studieze natura următoarelor integrale improprii şi să se determine valorile acestora, în caz de convergenţă:

a) $\int_0^\infty e^{-ax}\cdot\cos bxdx, a>0, b\in\mathbf{R}$

b) $\int_0^{3/\pi}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$

c) $\int_0^\infty e^{-x}\cdot x^n dx, n\in\mathbf{N}$

d) $\int_0^\infty e^{-x^2}\cdot x^{2n+1}dx, n\in\mathbf{N}$

e) $\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{x^2+x+1}$

f) $\int_0^\infty\frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}dx$

g) $\int_0^{\pi/2}\ln\cos xdx$.

R. a) $\frac{a}{a^2+b^2}$; b) divergentă, deoarece nu există $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\cos\frac{1}{x}$;

c) notând integrala cu I_n, se obține, integrând prin părți, $I_n = nI_{n-1}$ de unde $I_n=n!$;

d) cu substituția $x^2 = t$, utilizând integrala precedentă, se obține $\frac{n!}{2}$;

e) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; f) $-\frac{1}{8}$;

g) cu substituția $x = \frac{\pi}{2} - t$, utilizând exercițiul 9.3.3., se obține $-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Exercițiul 7.4.2. Să se calculeze:

a) $\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$ b) $\int_{2}^{\infty}|x-3|\cdot e^{-x}dx$

c) $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ d) $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.

R. a) π; b) $\frac{2}{e^3}$; c) $\frac{\pi}{2ab(a+b)}$; d) π.

Exercițiul 7.4.3. Cu schimbarea de variabilă $x = \sqrt{t}$ să se arate că integralele improprii $\int_{0}^{\infty}\sin x^2 dx$ și $\int_{0}^{\infty}\cos x^2 dx$ sunt convergente (integralele lui Fresnel)

Exercițiul 7.4.4. Să se studieze natura următoarelor integrale improprii:

a) $\int_{0}^{\infty}x\sin x^4 dx$, $\int_{0}^{\infty}x\cos x^4 dx$;

b) $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x+[x]}$, unde [x] reprezintă partea întreagă a numărului real x;

c) $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} dx$; d) $\int_0^{\infty} e^{-x} \cdot \sqrt{x} dx$; e) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}} dx$

R. a) convergente (se face schimbarea de variabilă $x = \sqrt{t}$ şi se ţine seama de 7.4.3.)

b) divergentă $\left(\frac{1}{x+[x]} \geq \frac{1}{2x}, x \geq 1 \right)$; c) divergentă; d) convergentă

e) deoarece $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}} = 0$, integrala este neesenţial improprie în limita inferioară, utilizând teorema 9.1.4. Pentru $\lambda = \frac{3}{2}$, $l = 0$, se obţine că integrala este convergentă.

Exerciţiul 7.4.5. Să se demonstreze că următoarele integrale improprii sunt convergente şi să se determine valorile acestora:

a) $\int_0^1 \ln x dx$ b) $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ d) $\int_0^{\pi} x \ln \sin x dx$

R. a) - 1; b) $\frac{\pi}{2}$; c) π ; d) - $\frac{\pi^2}{2} \ln 2$ (se face schimbarea $x = \pi - t$ şi se ţinea seama de exerciţiul 7.3.3.)

Exerciţiul 7.4.6. Să se calculeze:

a) V • p • $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{9+x^2}$ b) V • p • $\int_1^5 \frac{dx}{x-2}$ c) V • p • $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt[4]{|x-3|}}$

R.) $\frac{\pi}{3}$; b) ln 3; c) $\frac{4}{3}\ln(1+\sqrt[4]{8})$

Exercițiul 7.4.7. Fie f:[0, ∞) x [0, ∞) →**R**, f(x, t) = $\frac{e^{-t^2x}}{1+t^2}$.

a) Demonstrați că integrala $\int_0^{\infty} f(x,t)dt$ este uniform convergentă pe $[0,\infty)$.

b) Deduceți că funcția F:[0, ∞) →**R**, F(x) = $\int_0^{\infty} f(x,t)dt$ este continuă pe $[0,\infty)$.

c) Demonstrați că funcția F este derivabilă pe (0, ∞) și calculați F'.

Exercițiul 7.4.8. Fie f: **R** x [0, ∞) →**R**, f(x, t) = $\frac{x^2}{1+t^2x^2}$.

a) Demonstrați că integrala $\int_0^{\infty} f(x,t)dt$ este uniform convergentă pe **R**,

b) Demonstrați că funcția F:**R**→**R**, F(x) = $\int_0^{\infty} f(x,t)dt$ este continuă pe **R**.

c) Demonstrați că F(x) = $\frac{\pi}{2}|x|$, pentru orice x∈ **R**. și deduceți că integrala $\int_0^{\infty} \frac{2x}{(1+t^2x^2)^2}dt$ converge punctual, dar nu converge uniform pe nici un interval care conține x = 0.

Exercițiul 7.4.9. Fie f: $\mathbf{R}$ x (0, ∞) $\to \mathbf{R}$, f(x, t) = $\dfrac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}$.

a) Demonstrați că integrala $\int_0^{\infty} f(x,t)dt$ este punctual convergentă pe $(0, \infty)$;

b) Demonstrați că integrala $\int_0^{\infty} f(x,t)dt$ este uniform convergentă pe [a, ∞) pentru orice a > 0;

c) Demonstrați că funcția F : (0, ∞) $\to \mathbf{R}$, F(x) = $\int_0^{\infty} f(x,t)dt$ este continuă pe $(0, \infty)$;

d) Demonstrați că integrala $\int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ este uniform convergentă pe [a, b], pentru orice b > a >0;

e) Să se calculeze F'(x) și să se deducă expresia lui F(x) pentru orice x > 0.

R. F(x) = ln x, x > 0

Exercițiul 7.4.10. Demonstrați că $\int_0^{\infty} e^{-t^2 x} dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, x > 0.

Exercițiul 7.4.11. Demonstrați că $\int_0^{\infty} \dfrac{\sin t}{t} \cdot e^{-tx} dt = \dfrac{\pi}{2} - arctgx, x \geq 0$

și deduceți $\int_0^{\infty} \dfrac{\sin t}{t} dt = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercițiul 7.4.12. Demonstrați că $\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \alpha > 0 \\ 0, \ \alpha = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, \alpha < 0 \end{cases}$.

Exercițiul 7.4.13. Demonstrați că $\int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos 2xt dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{-x^2}$,x∈ **R**

Exercițiul 7.4.14. a) Utilizând teorema 7.1.19. și exercițiul 7.4.10., demonstrați că $\int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+(x+u^2)^2} du, x \geq 0$ și deduceți că $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

b) Demonstrați că $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Exercițiul 7.4.15. Demonstrați că, pentru orice x > 0,

$$\int_0^{\infty} \sin t \cdot e^{-tx} dt = \int_0^{\infty} \cos t \cdot e^{-tx} dt$$

și, utilizând exercițiul 7.4.14., demonstrați că $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Exercițiul 7.4.16. Utilizând teorema 7.1.16. pentru integrala

$$\int_0^{\infty} \frac{1-e^{-xt}}{t}\cos t dt \text{ , x > 0, să se calculeze } \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-t}}{t}\cos t dt$$

R. ln $\sqrt{2}$.

Exercițiul 7.4.17. Să se calculeze :

a) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} dx$ b) $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$ (a, b> 0)

R. a) ln $\frac{b}{a}$; b) $\frac{\pi}{2}(b-a)$.

Exercițiul 7.4.18. Să se verifice direct că

$$\int_1^{\infty}\left[\int_1^{\infty} \frac{t^2-x^2}{(t^2+x^2)^2} dx\right] dt \neq \int_1^{\infty}\left[\int_1^{\infty} \frac{t^2-x^2}{(t^2+x^2)^2} dt\right] dx$$

Exercițiul 7.4.19. Fie Γ : (0, ∞) $\rightarrow$(0, ∞), $\Gamma(x) = \int_1^{\infty} t^{x-1}\cdot e^{-t} dt$ (vezi exercițiul 7.3.5.) Demonstrați că $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, pentru orice x > 0 și deduceți că $\Gamma(n+1) = n!$, pentru orice n$\in$ **N**.

Exercițiul 7.4.20. Fie B: (0, ∞) x(0, ∞)$\rightarrow$(0, ∞),

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

(vezi exercițiul 7.3.6.)

a) Utilizând schimbarea de variabilă t = $\frac{u}{1+u}$, demonstrați că

B(x, y)= $\int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$;

b) Demonstrați că $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)$;

c) Demonstrați că $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$ și deduceți că $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercițiul 7.4.21. Folosind funcțiile B ("beta") și Γ ("gama"), să se calculeze:

a) $\int_1^{\infty} x^p \ln^q x dx, p, q > -1$

b) $\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x dx, p, q > -1$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}, m > 0, n \in \mathbf{N}$, n ≥ 2

R. a) $\frac{(-1)^{q+1}}{(p+1)^{q+1}} \cdot \Gamma(q+1)$; b) $\frac{1}{2} B\left(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2}\right)$;

c) $x = t^{\frac{1}{m}}$; $\frac{1}{m} B\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}+1\right)$.

8. INTEGRALA CURBILINIE DE PRIMUL TIP

8.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale

8.1.1. Drumuri şi curbe în $\mathbf{R}^p$

Definiţia 8.1.1.1. Se numeşte *drum* în $\mathbf{R}^p$ orice funcţie continuă $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^p$, cu $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$.

Dacă $f_1, f_2, \ldots, f_p$ $[a, b] \to \mathbf{R}$ sunt componentele lui γ, atunci egalităţile

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t) \\ x_2 = f_2(t) \\ \qquad\qquad , t \in [a, b] \text{ se numesc } \textit{ecuaţiile parametrice} \text{ ale drumului } \gamma. \\ x_p = f_p(t) \end{cases}$$

Imaginea drumului γ se notează (γ) şi este :

$$(\gamma) = \{(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_p(t)), t \in [a, b]\}.$$

Ea este o submulţime a lui $\mathbf{R}^p$

Punctele $\gamma(a)$ şi $\gamma(b)$ se numesc *capetele drumului* γ.

Drumul $\gamma^* : [a, b] \to \mathbf{R}^p$ definit prin $\gamma^*(t) = \gamma(a + b - t)$ se numeşte *opulul lui* γ.

Observaţia 8.1.1.1. Evident $\gamma(a) = \gamma^*(b)$, $\gamma(b) = \gamma^*(a)$ şi $(\gamma) = (\gamma^*)$

Definiția 8.1.1.2. Dacă $\gamma_1 :[a, b] \to \mathbf{R}^p$, $\gamma_2 : [b, c] \to \mathbf{R}^p$ sunt două drumuri și $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, atunci drumul $\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a, c] \to \mathbf{R}^p$ definit prin:

$$(\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), t \in [a,b] \\ \gamma_2(t), t \in [b,c] \end{cases}$$

se numește *juxtapunerea drumurilor* γ_1 și γ_2.

Observația 8.1.1.2. Imaginea drumului $\gamma_1 \cup \gamma_2$ este reuniunea imaginilor drumului γ_1 și γ_2.

Definiția 8.1.1.3. Un drum $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^p$ se numește *neted* dacă funcția γ este de clasă C^1 pe [a, b] și $\gamma'(t) \neq O_{\mathbf{R}^p}$ pentru orice $t \in [a, b]$. Drumul γ se numește *neted pe porțiuni* dacă este juxtapunerea unui număr finit de drumuri netede.

Definiția 8.1.1.4. Două drumuri netede $\gamma_1 :[a, b] \to \mathbf{R}^p$, $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^p$ se numesc *echivalente, cu aceeași orientare*, dacă există $h : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ astfel încât:

1. h este de clasă C^1 pe [a, b]
2. h este bijectivă;
3. h este strict crescătoare ;
4. $\gamma_1(t) = \gamma_2(h(t))$ pentru orice $t \in [a, b]$.

Observația 8.1.1.3. a) Orice două drumuri echivalente au aceeași imagine, dar reciproca afirmației nu este adevărată, adică există drumuri având aceeași imagine și care nu sunt echivalente (de exemplu $\gamma_1 :[0, 1] \to \mathbf{R}^2$, $\gamma_1(t) = (t, t)$ și $\gamma_2 :[-1, 1] \to \mathbf{R}^2$, $\gamma_2(t) = (t^2, t^2)$).
b) Faptul că h este strict crescătoare corespunde intuitiv faptului că imaginile lor sunt parcurse în același sens, ceea ce explică folosirea cuvintelor "cu aceeași orientare" în definiția precedentă. Dacă h este strict descrescătoare, atunci γ_1 este echivalent cu γ_2^*.
c) Relația binară obținută pe mulțimea drumurilor netede prin definiția 8.1.1.4. este o relație de echivalență.

Definiția 8.1.1.5. Se numește *curbă* în $\mathbf{R}^p$ o clasă de drumuri echivalente din $\mathbf{R}^p$. *Imaginea* curbei este imaginea oricărui drum conținut în curbă.

Observaţia 8.1.1.4. Deseori se foloseşte noţiunea de curbă în sensul de imagine a sa, care este o submulţime din $\mathbf{R}^p$, ceea ce explică următoarele afirmaţii privind:

a) *Curbe în* $\mathbf{R}^2$.

- Dacă $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ este un drum neted în $\mathbf{R}^2$, cu componentele f, g $:[a, b] \to \mathbf{R}$, se spune că egalităţile $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), t \in [a,b] \end{cases}$ sunt *ecuaţiile parametrice ale curbei* din care face parte drumul γ
- Dacă $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^2$ este dat de $\gamma(t) = (t, \varphi(t))$, atunci se spune că $y = \varphi(x)$, $x \in [a, b]$ este *ecuaţia explicită* a curbei din care face parte drumul γ.
- Dacă $F : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ este o funcţie de clasă C^1 pe mulţimea deschisă $A \subset \mathbf{R}^2$ şi ecuaţia $F(x, y) = 0$ defineşte (local) implicit pe y ca funcţie de x, se spune că $F(x, y) = 0$ este *ecuaţia implicită* a unei curbe în $\mathbf{R}^2$.

b) *Curbe în* $\mathbf{R}^3$.

- Dacă $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ este un drum neted în $\mathbf{R}^3$, cu componentele f, g, h:[a, b] $\to \mathbf{R}$, se spune că egalităţile $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t), t \in [a,b] \end{cases}$ sunt *ecuaţiile parametrice ale curbei* din care face parte drumul γ.
- Dacă $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^3$ este dat de $\gamma(t) = (t, \varphi(t), \psi(t))$, atunci se spune că $\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x), x \in [a,b] \end{cases}$ sunt *ecuaţiile explicite* ale curbei din care face parte drumul γ.
- Dacă $F, G : A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ sunt două funcţii de clasă C^1 pe mulţimea deschisă $A \subset \mathbf{R}^3$ şi sistemul $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$

defineşte (local) implicit pe y şi z ca funcţii de x, se spune că $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ sunt *ecuaţiile implicite* ale unei curbe în $\mathbf{R}^3$.

8.1.2. Drumuri rectificabile. Lungimea unui drum.

Fie γ :[a, b] $\to \mathbf{R}^3$, $\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t))$ un drum în $\mathbf{R}^3$ şi Δ o diviziune a intervalului [a, b] determinată de $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

Punctele $M_i(f(t_i), g(t_i), h(t_i))$, $i = \overline{0,n}$ determină o linie poligonală ale cărei vârfuri aparţin imaginii lui γ.

Lungimea acestei linii poligonale este:

$$l_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f(t_i)-f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i)-g(t_{i-1})]^2 + [h(t_i)-h(t_{i-1})]^2}$$

şi creşte dacă diviziunea Δ este înlocuită cu o diviziune mai fină.

Definiţia 8.1.2.1. Drumul γ se numeşte *rectificabil* dacă mulţimea $\{l_\Delta, \Delta$ este o diviziune a lui [a, b]$\}$ este majorată. Marginea superioară a acestei mulţimi se numeşte lungimea drumului γ şi se notează l_γ.

Teorema 8.1.2.1. Dacă γ :[a, b] $\to \mathbf{R}^3$, $\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t))$ un drum neted, atunci γ este rectificabil şi

$$l_\gamma = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt$$

Pentru calculul lungimii unui drum neted se pot folosi şi următoarele formule:

- Dacă γ este dat de ecuaţiile explicite $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$, $x \in$ [a, b], atunci: $l_\gamma = \int_a^b \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2 + [\psi'(x)]^2}\, dx$

- Dacă $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (f(t), g(t))$ este un drum neted, atunci:
$$l_\gamma = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$
- Dacă γ este un drum neted dat prin ecuația explicită $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, atunci: $l_\gamma = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

Teorema 8.1.2.2. Un drum echivalent cu un drum rectificabil γ este rectificabil şi are aceeaşi lungime cu γ.

Observaţia 8.1.2.1. Din teorema anterioară rezultă că toate drumurile ce aparţin unei curbe netede au aceeaşi lungime, care va fi numită *lungimea curbei*.

8.1.3. Integrala curbilinie de primul tip

Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ un drum neted şi $F : (\gamma) \to \mathbf{R}$ o funcţie arbitrară. Pentru o diviziune d a intervalului [a, b] determinată de $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ se notează cu l_i lungimea arcului de extremităţi $\gamma(t_{i-1})$ şi $\gamma(t_i)$, iar $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$, $\theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ este un sistem de puncte intermediare.

Funcţiei F, diviziunii d şi sistemului θ de puncte intermediare i se asociază suma:

$$\sigma(F, d, \theta) = \sum_{i=1}^{n} F(\gamma(\theta_i)) \cdot l_i$$

Definiţia 8.1.3.1. Funcţia F se numeşte *integrabilă în raport cu arcul* pe drumul γ dacă există $I \in \mathbf{R}$ astfel încât, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel ca, pentru orice diviziune d a lui [a, b] cu $\| d \| < \delta$ şi orice sistem de puncte intermediare θ să avem:

$$| \sigma(F, d, \theta) - I | < \varepsilon.$$

Numărul real I se numeşte *integrala curbilinie în raport cu arcul* sau *integrala curbilinie de primul tip* a funcţiei F pe drumul γ şi se notează:

$$I = \int_{\gamma} F(x, y, z)dl$$

Observaţia 8.1.3.1. a) Dacă F(x, y, z) = 1, pentru orice (x, y, z) ∈ (γ), rezultă imediat că numărul I este tocmai l_γ a arcului (γ). Deci $l_\gamma = \int_{\gamma} dl$.

b) Se poate demonstra că dacă γ_1 şi γ_2 sunt două drumuri echivalente şi F este integrabilă în raport cu arcul pe γ_1, atunci ea este integrabilă şi pe γ_2 şi cele două integrale coincid. De aici rezultă că, dacă F este integrabilă în raport cu arcul pe un drum γ, atunci ea este integrabilă pe orice drum din curba din care face parte γ şi valoarea integralei este aceeaşi. Aceasta justifică denumirea de integrală curbilinie (sau integrală pe curba din care face parte γ).

Teorema 8.1.3.1. Fie γ :[a, b] → $\mathbf{R}^3$ un drum neted de ecuaţii x =f(t), y = g(t), z = h(t), t ∈ [a, b] şi F o funcţie continuă pe un domeniu ce conţine imaginea lui γ. Atunci F este integrabilă în raport cu arcul pe drumul γ şi

$$\int_{\gamma} F(x, y, z)dl = \int_{a}^{b} F(f(t), g(t), h(t))\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt$$

Observaţia 8.1.3.2. Dacă γ :[a, b] → $\mathbf{R}^2$ este un drum neted de ecuaţii x = f(t), y = g(t), t ∈ [a, b] şi F : (γ) → $\mathbf{R}$ este o funcţie continuă, atunci F este integrabilă în raport cu arcul pe γ şi

$$\int_{\gamma} F(x, y)dl = \int_{a}^{b} F(f(t), g(t))\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

Teorema 8.1.3.2. *(Proprietăţi ale integralei curbilinii de primul tip)*

Fie γ :[a, b] → $\mathbf{R}^3$ un drum neted, F, G : (γ) → $\mathbf{R}$ continue. Atunci:

$$\int_{\gamma}(\alpha F(x,y,z)+\beta G(x,y,z))dl=\alpha\int_{\gamma}F(x,y,z)dl+\beta\int_{\gamma}G(x,y,z)dl$$

(liniaritate)

- Dacă $F(\gamma(t))\geq 0$ **pentru orice** $t\in$ [a, b], atunci
$$\int_{\gamma}F(x,y,z)dl\geq 0$$
(monotonie)
- $$\left|\int_{\gamma}F(x,y,z)dl\right|\leq\int_{\gamma}|F(x,y,z)|dl$$
(**estimarea modulului** integralei)
- Există $t^{*}\in$ [a, b] **astfel încât** $\int_{\gamma}F(x,y,z)dl=F(\gamma(t^{*}))\cdot l_{\gamma}$, unde l_{γ} este lungimea **drumului** γ (formula de medie)
- $$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2}F(x,y,z)dl=\int_{\gamma_1}F(x,y,z)dl+\int_{\gamma_2}F(x,y,z)dl$$
(aditivitate față de drum)
- $$\int_{\gamma}F(x,y,z)dl=\int_{\gamma^{-}}F(x,y,z)dl$$
(**independența** de orientare)

8.1.4. Aplicații ale integralei curbilinii de primul tip

8.1.4.1. Lungimea unei curbe

Curba reprezentată de drumul neted γ de ecuații $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, $t\in$ [a, b] are lungimea $l_{\gamma}=\int_{\gamma}dl$.

8.1.4.2. Masa unui fir material

Dacă imaginea (γ) a drumului neted γ modelează un fir material, iar $\rho : (\gamma) \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă care asociază fiecărui punct $(x, y, z) \in (\gamma)$ densitatea $\rho(x, y, z)$ a firului în acel punct, atunci masa firului este $m = \int_{\gamma} \rho(x, y, z)dl$

8.1.4.3. Centrul de greutate al unui fir material

Coordonatele centrului de greutate al firului (γ) a cărui densitate în punctul (x, y, z) este $\rho(x, y, z)$ sunt date de egalităţile:

$$x_G = \frac{\int_{\gamma} x\rho(x,y,z)dl}{\int_{\gamma} \rho(x,y,z)dl} \; ; \; y_G = \frac{\int_{\gamma} y\rho(x,y,z)dl}{\int_{\gamma} \rho(x,y,z)dl} \; ; \; z_G = \frac{\int_{\gamma} z\rho(x,y,z)dl}{\int_{\gamma} \rho(x,y,z)dl}$$

8.1.4.4. Momentele de inerţie ale unui fir material

Momentele de inerţie ale firului material (γ), având densitatea $\rho(x, y, z)$ în punctul (x, y, z), în raport cu axele Ox, Oy, Oz sunt:

$$I_x = \int_{\gamma} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dl \; ;$$

$$I_y = \int_{\gamma} (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dl \; ;$$

$$I_z = \int_{\gamma} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dl$$

8.1.4.5. Atracţia exercitată asupra unui punct material de către un fir material

Punctul material $M(x_0, y_0, z_0)$ având masa m_0, este atras de firul material (γ), cu densitatea $\rho(x, y, z)$ în punctul (x, y, z), cu o forţă ale cărei componente sunt:

$$F_x = km_0 \int_\gamma \frac{(x-x_0)\rho(x,y,z)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{3/2}} dl;$$

$$F_y = km_0 \int_\gamma \frac{(y-y_0)\rho(x,y,z)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{3/2}} dl;$$

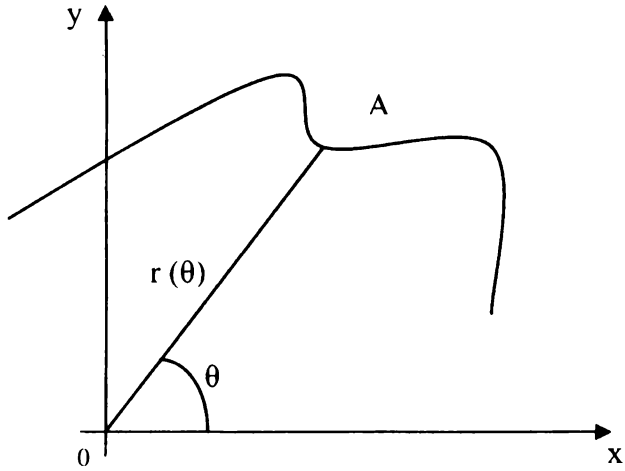
$$F_z = km_0 \int_\gamma \frac{(z-z_0)\rho(x,y,z)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{3/2}} dl.$$

Aici k este o constantă ce depinde de alegerea unităţilor de măsură.

8.2. Tipuri de probleme şi metode de rezolvare

Exerciţiul 8.2.1. Să se calculeze $\int_\gamma F(x,y,z)dl$

- se scriu ecuaţiile parametrice ale lui γ : $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t), t \in [a,b] \end{cases}$.
- Dacă γ este o curbă din $\mathbf{R}^2$ dată prin ecuaţia implicită F(x, y) = 0, se poate încerca folosirea coordonatelor polare astfel: înlocuind $x = r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ în ecuaţia F(x, y) = 0, se obţine o relaţie ce evidenţiază legătura între raza polară r şi unghiul polar θ.



Rezolvând ecuația obținută se obține r = r(θ), cu θ∈ [a, b] ⊂ [0, 2π] și deci $\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta, \theta \in [a,b] \end{cases}$, care reprezintă ecuațiile parametrice ale curbei .

În unele probleme se precizează direct legătura între r și θ și de aici se obțin, ca mai înainte, ecuațiile parametrice.

- se transformă integrala curbilinie în integrală definită prin formula

$$\int_{\gamma} F(x,y,z)dl = \int_{a}^{b} F(f(t),g(t),h(t))\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2+[h'(t)]^2}\,dt$$

- se calculează integrala definită.

Exercițiul 8.2.2. Să se calculeze lungimea curbei γ dată de ecuațiile.....

- se scriu ecuațiile parametrice ale curbei
- se scrie lungimea conform formulei 8.1.4.1.
- se calculează integrala curbilinie rezultată

Exercițiul 8.2.3. Să se determine masa firului material care este imaginea curbei de ecuații..., dacă densitatea în fiecare punct este $\rho(x, y, z) = \ldots$

- se scriu ecuațiile parametrice ale curbei
- se aplică formula 8.1.4.2. pentru calculul masei
- se calculează integrala curbilinie rezultată

Exercițiul 8.2.4. Să se determine coordonatele centrului de greutate al firului material care este imaginea curbei de ecuații ..., dacă densitatea sa în fiecare punct este $\rho(x, y, z) = \ldots$

- se scriu ecuațiile parametrice ale curbei
- se aplică formulele din 8.1.4.3. pentru calculul coordonatelor
- se calculează integralele curbilinii rezultate.

Exercițiul 8.2.5. Să se determine momentul de inerție în raport cu axa Ox (sau Oz sau Oy) al firului material care este imaginea curbei de ecuații ..., dacă densitatea sa în fiecare punct este $\rho(x, y, z) = \ldots$

- se scriu ecuațiile parametrice ale curbei
- se aplică formula corespunzătoare din 8.1.4.4. pentru calculul momentului de inerție
- se calculează integrala curbilinie rezultată

Exercițiul 8.2.6. Să se determine atracția exercitată asupra punctului material $M(x_0, y_0, z_0)$ unde se află masa m_0 de către firul material,..., având densitatea în fiecare punct $\rho(x, y, z) = \ldots$

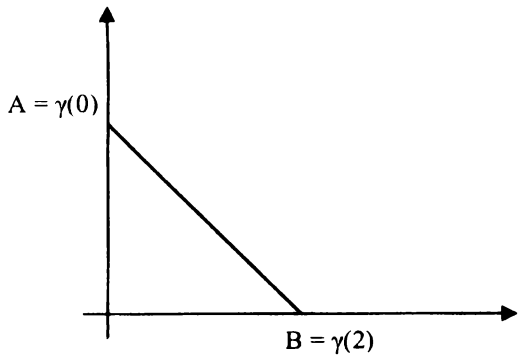
- se scriu ecuațiile parametrice ale curbei
- se aplică formulele din 8.1.4.5.
- se calculează integralele curbilinii rezultate

8.3. Exerciții rezolvate

Exercițiul 8.3.1. Să se calculeze $\int_{\gamma} xydl$, unde γ este dată de $x = t$,

$y = 2 - t, t \in [0, 2]$

Soluţie.

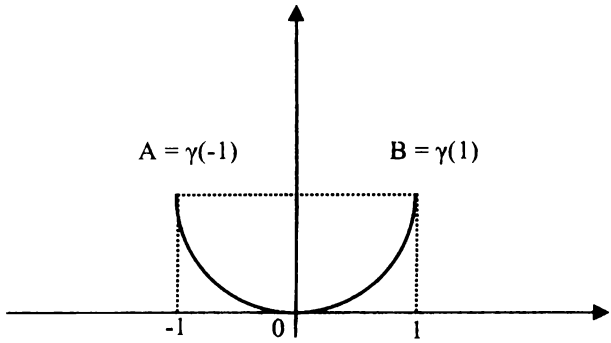


$$\int_{\gamma} xydl = \int_{0}^{2} t(2-t)\sqrt{1^2+(-1)^2}\,dt = \sqrt{2}\int_{0}^{2}(2^t - t^2)dt =$$

$$= \sqrt{2}\left(t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \sqrt{2}\left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Exerciţiul 8.3.2. Să se calculeze $\int_{\gamma} xydl$ unde γ este dată de $y = x^2$, $x \in [-1,1]$.

Soluție.



Ecuațiile parametrice ale lui γ sunt $\begin{cases} x = t \\ y = t^2, t \in [-1,1] \end{cases}$.

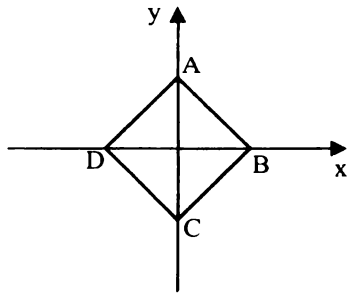
Deci $\int_\gamma xydl = \int_{-1}^{1} t^3 \sqrt{1^2 + (2t)^2}\, dt = 0$ (deoarece se integrează o funcție impară pe un interval simetric fată de 0)

Exercițiul 8.3.3. Să se calculeze $\int_\gamma xydl$ unde γ : |x| + |y| = a, a>0

Soluție. Imaginea drumului γ este prezentată în figura următoare. Se observă că ea este reuniunea imaginii a patru drumuri:

AB: $\begin{cases} x = t \\ y = a - t, t \in [0,a] \end{cases}$ CB: $\begin{cases} x = t \\ y = t - a, t \in [0,a] \end{cases}$

DC: $\begin{cases} x = t \\ y = -t - a, t \in [-a,0] \end{cases}$ DA: $\begin{cases} x = t \\ y = a + t, t \in [-a,0] \end{cases}$



Rezultă $\int_{\gamma} xydl = \int_{AB} xydl + \int_{BC} xydl + \int_{CD} xydl + \int_{DA} xydl =$

$$= \int_0^a t(a-t)\sqrt{1^2+(-1)^2}\,dt + \int_0^a t(a-t)\sqrt{1^2+1^2}\,dt -$$

$$- \int_{-a}^0 t(-t-a)\sqrt{1^2+(-1)^2}\,dt + \int_{-a}^c t(a+t)\sqrt{1^2+1^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\left[\int_0^a t(a-t)dt + \int_0^a t(a-t)dt + \int_{-a}^0 t(a+t)dt + \int_{-a}^0 t(a+t)dt\right] = 0$$

Exercițiul 8.3.4. Să se calculeze $\int_{\gamma}(x+y)dl$ unde γ este bucla lemniscatei $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ aflată în cadranele I și IV.

Soluție. Înlocuim x și y în ecuația implicită prin $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Rezultă $r^4 = a^2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = a^2r^2\cos 2\theta$, adică $r^2 = a^2\cos 2\theta$. Din condiția $\cos 2\theta \geq 0$ rezultă $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ (ținând cont și de faptul că interesează bucla din cadranele I și IV)

Rezultă şi $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$, deci ecuaţiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = a\sqrt{\cos 2\theta}\cdot\cos\theta \\ y = a\sqrt{\sin 2\theta}\cdot\sin\theta, \theta\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right] \end{cases}$$

Atunci $\int_\gamma (x+y)dl = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}(a\sqrt{\cos 2\theta}\cdot\cos\theta + a\sqrt{\cos 2\theta}\cdot\sin\theta)\cdot$

$$\cdot\sqrt{\left[\left(a\sqrt{\cos 2\theta}\cdot\cos\theta\right)'\right]^2+\left[\left(a\sqrt{\cos 2\theta}\cdot\sin\theta\right)'\right]^2}\,d\theta =$$

$$= a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta}+\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta})\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\left[\sqrt{\cos 2\theta}\right]^2+\left[\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right]^2}\,d\theta =$$

$$= a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta}+\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta})\cdot\sqrt{\frac{1}{\cos 2\theta}}d\theta =$$

$$= a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\sin\theta+\cos\theta)d\theta = a^2(\sin\theta-\cos\theta)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = a^2\sqrt{2}.$$

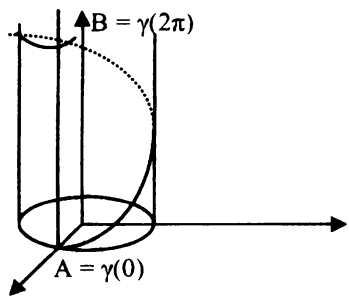
Exerciţiul 8.3.5. Să se calculeze $I = \int_\gamma (x+y+z)dl$, unde γ este dată de $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $t\in[0, 2\pi]$.

Soluție.

$$\int_{\gamma}(x+y+z)dl =$$

$$\int_0^{2\pi}(\cos t+\sin t+t)\cdot\sqrt{[(\cos t)']^2+\left[(\sin t)'\right]^2+[t']^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}(\cos t+\sin t+t)\sqrt{2}dt = \sqrt{2}\left(\sin t-\cos t+\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi^2\sqrt{2}$$

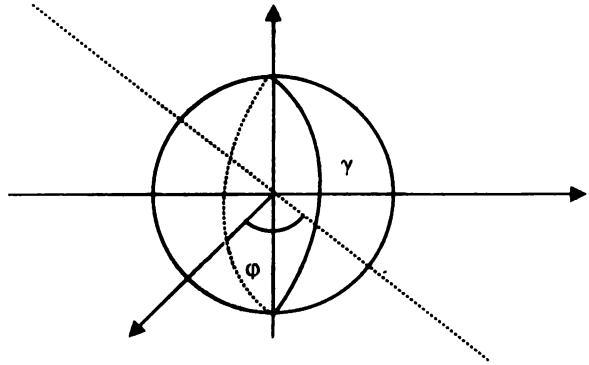


Imaginea curbei γ este reprezentată în figură.

Exercițiul 8.3.6. Să se calculeze $\int_{\gamma}\sqrt{2y^2+z^2}\,dl$, unde γ este circumferința cercului de ecuație $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x=y\end{cases}$

Soluție. Cercul γ este intersecția sferei de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ cu planul de ecuație $x = y$.

$S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$



Ecuațiile parametrice ale curbei sunt obținute cu ajutorul ecuațiilor parametrice ale sferei: $\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi \\ y = a\sin\theta\sin\varphi \\ z = a\cos\theta, \varphi \in [0,2\pi], \theta \in [0,\pi] \end{cases}$ ținând cont că din condiția x = y rezultă $\varphi = \frac{\pi}{4}$ sau $\varphi = \frac{5\pi}{4}$.

Rezultă γ : $\begin{cases} x = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\theta \\ y = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\theta \\ z = a\cos\theta, \theta \in [0,\pi] \end{cases}$ sau $\begin{cases} x = -\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\theta \\ y = -\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\theta \\ z = a\cos\theta, \theta \in [0,\pi] \end{cases}$

Deci x = $\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\theta$, y = $\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\theta$, z = acos θ, θ∈ [0, 2π].

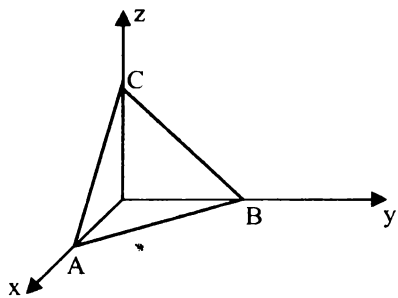
Rezultă $\int_{\gamma}\sqrt{2y^2+z^2}\,dl=\int_0^{2\pi}\sqrt{2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)^2+(a\cos\theta)^2}\cdot$

$$\cdot\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)^2+(-a\sin\theta)^2}\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a^2}\,d\theta=a^2\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi a^2$$

Exercițiul 8.3.7. Să se calculeze $\int_{\gamma}(x+y+z)dl$ unde γ este triunghiul cu vârfurile în A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1).

Soluție. Se observă că γ este reuniunea a trei drumuri:



AB: $\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=0,t\in[0,1]\end{cases}$ BC: $\begin{cases}x=0\\y=1-t\\z=t,t\in[0,1]\end{cases}$

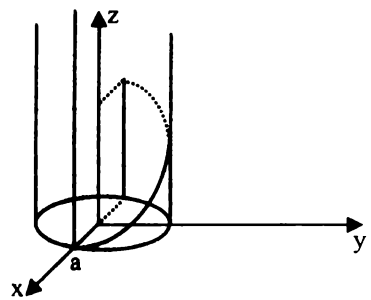
$$\text{CA: } \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 - t, t \in [0,1] \end{cases}$$

Rezultă $\int_\gamma (x + y + z)dl = \int_0^1 (t + 1 - t)\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}\,dt +$

$$+ \int_0^1 (t + 1 - t)\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2}\,dt + \int_0^1 (t + 1 - t)\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}\,dt$$

$$= 3\int_0^1 \sqrt{2}dt = 3\sqrt{2}.$$

Exercițiul 8.3.8. Să se calculeze lungimea curbei γ definită prin reprezentarea parametrică: **x = a cost**, y = a sint, y = bt, t∈ [0, 2π],a > 0,b> 0
Soluție. Curba este o elice **circulară** a cărei imagine este prezentată în figura alăturată.



Lungimea sa este:

$$l_\gamma = \int_0^\pi \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\,dt = \pi\sqrt{a^2 + b^2}$$

Exercițiul 8.3.9. Să se determine masa şi coordonatele centrului de greutate al firului material care este imaginea curbei γ : $x = 4t^5$; $y = \sqrt{15}\,t^4$; $z = 2t^3$, $t \in [-1, 1]$ dacă densitatea în punctul (x, y, z) este $\rho(x, y, z) = \frac{1}{2}|z|$.

Soluție.

$$m = \int_{\gamma} \frac{1}{2}|z|\,dl = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}|2t^3|\sqrt{(20t^4)^2 + (4\sqrt{15}t^3)^2 + (6t^2)^2}\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\cdot 2\,|t^3|\,t^2(20t^2+6)dt = 2\int_{0}^{1} t^5(20t^2+6)dt = \left(\frac{40t^8}{8} + \frac{12t^6}{6}\right)\Bigg|_0^1$$

$= 5 + 2 = 7$

Coordonatele centrului de greutate sunt :

$$x_G = \frac{\int_{\gamma} x\cdot\frac{1}{2}\cdot|z|\,dl}{7} = \frac{\int_{-1}^{1} 4t^5\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|t^3|\cdot t^2(20t^2+6)dt}{7} = 0$$

$$y_G = \frac{\int_{\gamma} y\cdot\frac{1}{2}\cdot|z|\,dl}{7} = \frac{\int_{-1}^{1} \sqrt{15}t^4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|t^3|\cdot t^2(20t^2+6)dt}{7} = \frac{68\sqrt{15}}{105}$$

$$z_G = \frac{\int_{\gamma} z\cdot\frac{1}{2}\cdot|z|\,dl}{7} = \frac{\int_{-1}^{1} 2t^3\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|t^3|\cdot t^2(20t^2+6)dt}{7} = 0$$

Exercițiul 8.3.10. Să se determine momentul de inerție în raport cu axa Oz a primei spirale a elicei x = a cost, y = a sint, z = bt, având densitatea constantă ρ.

Soluție. $I_z = \int_\gamma (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dl = \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2 \sin^2 t) \cdot$

$$\cdot \rho\sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2}\, dt = 2\pi a^2 \cdot \rho\sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

Exercițiul 8.3.11. Să se determine atracția exercitată de arcul de astroidă $x = a\cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ situat în primul cadran, asupra unității de măsură situată în originea coordonatelor, dacă densitatea în fiecare punct este egală cu cubul distanței de la punct la originea coordonatelor.

Soluție.

$$F_x = k \cdot 1 \cdot \int_\gamma \frac{x\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} dl =$$

$$= k \int_0^{\pi/2} a\cos^3 t \sqrt{9\sin^2 t \cos^4 t + 9\sin^4 t \cos^2 t}\, dt =$$

$$= k \int_0^{\pi/2} 3a \sin t \cos^4 t\, dt = -k3a \frac{\cos^5 t}{5}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3ak}{5}.$$

Analog, $F_y = k \cdot 1 \cdot \int_\gamma y dl = k \int_0^{\pi/2} 3a \sin^4 t \cos t dt = 3a \frac{\sin^5 t}{5}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3ak}{5}$.

8.4. Exerciții propuse

Exercițiul 8.4.1. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de primul tip:

a) $\int_\gamma xydl$; $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (t, 1 - t)$;

b) $\int_{\gamma}(x+y^2)dl$; $\gamma : [0, \pi] \to \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$;

c) $\int_{\gamma}4x^6 ydl$; $\gamma : [0, 2] \to \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (e^t, e^{-t})$;

d) $\int_{\gamma}y^2 dl$; $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$;

e) $\int_{\gamma}\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$; γ este segmentul de dreaptă ce unește punctele O(0, 0) și A(1, 2);

f) $\int_{\gamma}xydl$; γ este porțiunea din eclipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, situată în cadranul I;

g) $\int_{\gamma}|xy|dl$; γ este cercul $x^2 + y^2 = 1$;

h) $\int_{\gamma}xy^3 dl$; γ este porțiunea astroidei $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ situată în cadranele I și IV;

i) $\int_{\gamma}2y^2 dl$; $\gamma : y = e^x$, $x \in [0, 1]$;

j) $\int_{\gamma}(x+y^2)dl$; γ este pătratul cu vârfurile în A(a, a), B(-a, a), C(-a, -a), D(a, -a).

R. a) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $\frac{2}{3}\left(\sqrt{(e^8+1)^3}-\sqrt{2^3}\right)$; d) $\frac{256}{15}$; e) $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$;

f) $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$; g) 2; h) 0; i) $\frac{2}{3}\left(\sqrt{(e^2+1)^3}-\sqrt{2^3}\right)$; j) $\frac{16a^3}{3}$.

Exercițiul 8.4.2. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de primul tip:

a) $\int_{\gamma} z(x^2+y^2)dl$, $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$;

b) $\int_{\gamma} (x^2+y^2)\ln z dl$, $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$;

c) $\int_{\gamma} (x^2-y^2+z^2)dl$, γ este juxtapunerea curbelor

$$\gamma_1 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3, \gamma_1(t) = (R\cos t, R\sin t, 0) \text{ și}$$

$$\gamma_2 : [0, R] \to \mathbb{R}^3, \gamma_1(t) = (0, R - t, t);$$

d) $\int_{\gamma} \sqrt{y^2 + \frac{z^2}{2}} dl$, γ este curba de ecuație $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 4 \\ x+y = 0 \end{cases}$;

e) $\int_{\gamma} \frac{dl}{\sqrt{1+2(2z-z^2)}}$, γ este curba de ecuație $\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ x+y-z = 0 \end{cases}$;

f) $\int_{\gamma} (x+yz)dl$, $\gamma : \begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3, x \in [-1,1] \end{cases}$;

g) $\int_{\gamma} (x^2-y^2)dl$, γ este curba de ecuație $\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x-y+z = 0, x \geq 0, z \geq 0 \end{cases}$

R. a) $\frac{-\sqrt{3}}{5} + \frac{8\sqrt{2}}{15}$; b) $\frac{1+2e^3}{3\sqrt{3}}$; c) $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)R^3$; d) $4\pi\sqrt{2}$;

e) $\pi\sqrt{2}$; f) 0; g) $\frac{2}{3}\left(\sqrt{2^3} - \sqrt{3^3}\right)$.

Indicații. d) ecuațiile parametrice sunt $x = \sqrt{2}\sin\theta$,
$y = -\sqrt{2}\sin\theta$, $z = 2\cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$;

e) Ecuațiile parametrice sunt: $x = \frac{1}{2}\sin 2\theta + \cos^2\theta$,

$y = \frac{1}{2}\sin 2\theta + \sin^2\theta$, $z = 1 + \sin 2\theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$;

g) Ecuațiile parametrice sunt: $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $z = \sin\theta - \cos\theta$,

$\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercițiul 8.4.3. Să se calculeze lungimile următoarelor curbe:

a) $x = ae^{kt}\cos t$, $y = ae^{kt}\sin t$, $z = ae^{kt}$, $t \in [0, 1]$, $a > 0$, $k > 0$.

b) $x = \operatorname{tg} t$, $y = \operatorname{ctg} t$, $z = \sqrt{2}\ln \operatorname{tg} t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$;

c) $x = t$, $y = \ln \sin t$, $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$;

d) $y = \arcsin e^{-x}$; $x \in [0, 1]$;

e) $y = \frac{1}{2}x^2$; $x \in [0, 1]$;

f) $r = a\sin^3\frac{\theta}{3}$; $\theta \in [0, 2\pi]$;

g) $\theta = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$, $r \in [1, 3]$;

h) $r = |\sin\theta|$, $\theta \in [0, 2\pi]$;

i) $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

R. a) $\frac{a}{k}\sqrt{1+2k^2}(e^k - 1)$; b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; c) $2\ln(1+\sqrt{2})$;

d) $\ln(e+\sqrt{e^2-1})$; e) $\frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{2}$; f) $\frac{a}{8}(8\pi-3\sqrt{3})$;

g) $2+\frac{1}{2}\ln 3$; h) 2π; i) **16a.**

Exercițiul 8.4.4. Să se **calculeze** masa segmentului elipsei $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, cu $b > a > 0$, **situat** în primul cadran, dacă densitatea în fiecare punct este egală cu **ordonata punctului**.

R. $\frac{a^2 b}{2\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}+\frac{b^2}{2}$.

Exercițiul 8.4.5. Să se **calculeze masa** primei spirale a elicei $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ (cu **a, b > 0**) **a cărei** densitate în fiecare punct este egală cu pătratul razei polare **a punctului.**

R. $\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+b^2}(3a^2+4\pi^2 b^2)$.

Exercițiul 8.4.6. Să se **găsească masa** arcului $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$, $t \in [0, 1]$ dacă **densitatea** în fiecare punct este invers proporțională cu pătratul razei polare **a punctului și** este egală cu unitatea în punctul $(1, 0, 1)$.

R. $\sqrt{3}(1-\frac{1}{e})$.

Exercițiul 8.4.7. Să se **calculeze masa** arcului $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, omogen cu **densitatea** 1.

R. $\frac{3a}{2}$

Exercițiul 8.4.8. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al firului material $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$ dacă $\rho(x, y) = \sqrt{y}$.

R. $x_G = \pi$, $y_G = \frac{3}{2}$.

Exercițiul 8.4.9. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al firului material $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dacă $\rho(x, y) = 1$.

R. $x_G = y_G = \frac{4}{5}$.

Exercițiul 10.4.10. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al firului $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$, $t \in [0, 2\pi]$ dacă $\rho(x, y, z) = 1$.

R. $x_G = y_G = 0$, $z_G = 2\pi$

Exercițiul 8.4.11. Să se calculeze momentul de inerție față de axa Oz al firului $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, având densitatea constantă ρ.

R. $I_z = \frac{\rho\sqrt{3}}{3}(e^{\pi} - 1)$

Exercițiul 8.4.12. Să se determine momentele de inerție față de axele de coordonate ale firului material $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ având densitatea $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

R. $I_z = \frac{\sqrt{2}\pi}{24}(12 + \pi^2)$, $I_y = \frac{\pi\sqrt{2}}{160}(20 + 10\pi + \pi^4)$,

$I_x = \frac{\pi\sqrt{2}}{160}(60 + 10\pi + \pi^4)$.

Exercițiul 8.4.13. Să se determine atracția exercitată de un semicerc omogen asupra unității de masă plasată în centrul său.

R. $F_x = 0$, $F_y = 2\rho \cdot k$.

9. INTEGRALE MULTIPLE

9.1. Noțiuni teoretice fundamentale

9.1.1. Definiția și proprietățile integralei duble

Definirea integralelor duble și a funcțiilor integrabile de două variabile, se face prin generalizarea rezultatelor din 6. Intervalul compact $[a, b] \subset \mathbf{R}$ este înlocuit cu un domeniu compact măsurabil Jordan din $\mathbf{R}^2$, deoarece acesta are proprietățile de bază ale intervalelor compacte din $\mathbf{R}$.

Reamintim că o mulțime deschisă și conexă se numește *domeniu*. Aderența unui domeniu se numește *domeniu închis*. Un domeniu închis și mărginit din $\mathbf{R}^2$ se numește *domeniu compact*. Un domeniu compact din $\mathbf{R}^2$ a cărui frontieră este imaginea unei curbe netede pe porțiuni, este *măsurabil Jordan (are arie)*.

În continuare vom considera numai domenii de acest fel.

Definiția 9.1.1.1. Fie $D \subset \mathbf{R}^2$ un domeniu compact măsurabil. Se numește *diviziune* a domeniului D, o familie finită $d = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ de mulțimi cu următoarele proprietăți:

a) fiecare mulțime D_i este domeniu compact măsurabil;

b) $\bigcup_{i=1}^{n} D_i = D$;

c) dacă $i \neq j$; atunci $\overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \emptyset$. ($\overset{\circ}{D}_i$ reprezintă interiorul mulțimii D_i)

Se numeşte *norma diviziunii* d, numărul:

$$\|d\| = \max \{d(D_i); i=1, 2, \ldots, n\}$$

unde $d(D_i)$ este diametrul mulţimii D_i.

Notăm cu $\mathcal{D}$ mulţimea tuturor diviziunilor domeniului D.

Definiţia 9.1.1.2. Fie $D \subset \mathbf{R}^2$ un domeniu compact măsurabil Jordan şi $f : D \to \mathbf{R}$ o funcţie mărginită, fie $d = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ o diviziune a domeniului D. Pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, fie $m_i = \inf f(D_i)$ şi $M_i = \sup f(D_i)$. Suma $s_f(D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot a(D_i)$ se numeşte *suma inferioară Darboux* asociată funcţiei f şi diviziunii d, iar suma $S_f(d) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot a(D_i)$ se numeşte *suma superioară Darboux* (cu $a(D_i)$ s-a notat aria domeniului D_i). Se numeşte *integrala inferioară Darboux* a funcţiei f pe domeniul D, numărul:

$$\underline{I} = \sup \{s_f(d); d \in \mathcal{D}\}$$

iar numărul :

$$\overline{I} = \inf \{S_f(d); d \in \mathcal{D}\}$$

se numeşte *integrala superioară Darboux* a funcţiei f pe domeniul D. Funcţia f se numeşte *integrabilă pe domeniul D în sensul lui Darboux*, dacă integrala inferioară Darboux coincide cu integrala superioară. Valoarea lor comună se numeşte *integrala dublă a funcţiei f pe domeniul compact D în sensul lui Darboux*.

Definiţia 9.1.1.3. Fie $D \subset \mathbf{R}^3$ un domeniu compact măsurabil şi $f : D \to \mathbf{R}$ o funcţie arbitrară; fie $d = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ o diviziune a domeniului D. Pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, fie $\xi_i \in D_i$, arbitrar; mulţimea de puncte $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ se numeşte *sistem de puncte intermediare* . Suma

$$\sigma_f(d, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot a(D_i)$$

se numeşte *suma Riemann* a funcţiei f corespunzătoare diviziunii d şi sistemului ξ de puncte intermediare. Funcţia f se numeşte *integrabilă pe*

domeniul compact D în sensul lui Riemann, dacă există $I \in \mathbf{R}$ încât, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$ astfel ca, pentru orice $d \in \mathcal{D}$ cu $\|d\| < \eta$ şi pentru orice sistem ξ de puncte intermediare, să avem $| \sigma_f(d, \xi) - I | < \varepsilon$. Numărul real I, a cărui unicitate se dovedeşte imediat, se numeşte *integrala funcţiei f în sensul lui Riemann, pe domeniul compact D.*

Observaţia 9.1.1.1. În definiţia 9.1.1.3. nu este necesar să presupunem funcţia f mărginită. Dacă însă presupunem că domeniul D are diviziuni de normă oricât de mică, se poate demonstra că *orice funcţie integrabilă Riemann* pe un asemenea domeniu *este mărginită.* De aceea, în continuare, vom considera numai funcţii mărginite.

Teorema 9.1.1.1. Fie $D \subset \mathbf{R}^2$ un domeniu compact măsurabil şi $f : D \to \mathbf{R}$ o funcţie mărginită. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) f este integrabilă în sens Darboux pe D;
b) pentru orice $\varepsilon > 0$, există $d \in \mathcal{D}$ încât $S_f(d) - s_f(d) < \varepsilon$;
c) pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$ astfel ca, pentru orice $d \in \mathcal{D}$ cu $\|d\| < \eta$, avem $S_f(d) - s_f(d) < \varepsilon$;
d) f este integrabilă în sens Riemann pe D.

În acest caz $I = \underline{I} = \overline{I}$; de aceea, în cele ce urmează, ne vom referi la funcţii integrabile pe domeniul compact D şi la integrale duble, fără a mai preciza sensul şi vom nota:

$$I = \iint_D f(x, y)dxdy .$$

Cea mai importantă consecinţă a teoremei precedente este integrabilitatea funcţiilor continue.

Teorema 9.1.1.2. Fie $D \subset \mathbf{R}^2$ un domeniu compact măsurabil Jordan şi $f : D \to \mathbf{R}$ o funcţie mărginită. Dacă mulţimea $D_1 \subset D$ a punctelor de discontinuitate ale funcţiei f este de măsură Jordan nulă (de arie nulă) atunci f este integrabilă pe D.

La fel ca şi în cazul integralei simple, se demonstrează următoarele proprietăţi:

Teorema 9.1.1.3. *(Proprietatea de liniaritate)*

Dacă f_1 şi f_2 sunt funcţii integrabile pe domeniul compact măsurabil $D \subset \mathbf{R}^2$ şi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ atunci funcţia $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ este integrabilă pe D şi are loc egalitatea:

$$\iint_D (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x,y)dxdy = \lambda_1 \iint_D f_1(x,y)dxdy + \lambda_2 \iint_D f_2(x,y)dxdy$$

Teorema 9.1.1.4. *(Proprietatea de aditivitate faţă de domeniu)*

Dacă D_1, D_2 , $D_1 \cup D_2$ sunt domenii compacte măsurabile, atunci funcţia mărginită f este integrabilă pe $D_1 \cup D_2$ dacă şi numai dacă f este integrabilă pe D_1 şi pe D_2; dacă în plus, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, atunci are loc egalitatea:

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy .$$

Teorema 9.1.1.5. *(Proprietatea de monotonie)*

Dacă f_1 şi f_2 sunt funcţii integrabile de domeniul compact măsurabil $D \subset \mathbf{R}^2$ şi pentru orice $(x, y) \in D$, avem $f_1(x, y) \le f_2(x, y)$ atunci:

$$\iint_D f_1(x,y)dxdy \le \iint_D f_2(x,y)dxdy$$

Teorema 9.1.1.6. Dacă funcţia f este integrabilă pe D, atunci şi |f| este integrabilă pe D şi are loc inegalitatea:

$$\left| \iint_D f(x,y)dxdy \right| \le \iint_D |f(x,y)|\, dxdy$$

Teorema 9.1.1.7. *(Formula de medie pentru integrala dublă)*

Dacă funcţia f este integrabilă pe domeniul compact măsurabil D şi $m = \inf f(D)$, $M = \sup f(D)$ atunci există $\mu \in [m, M]$ încât:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \mu \cdot a(D).$$

Dacă f este continuă pe D, atunci există $(\xi, \tau) \in D$ încât

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(\xi, \tau) \cdot a(D).$$

9.1.2. Calculul integralelor duble

Teorema 9.1.2.1. Fie D = [a, b] x [c, d] şi f : D $\to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe D. Dacă pentru fiecare **x∈ [a, b] există**

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

atunci funcţia F:[a, b] $\to \mathbb{R}$ **este integrabilă pe** [a, b] şi are loc egalitatea :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b F(x)dx,$$

care se mai scrie

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx.$$

Observaţia 9.1.2.1. Schimbând în teoremă rolul variabilelor x şi y obţinem: dacă f este integrabilă **pe D şi dacă pentru** fiecare y ∈ [c, d] există

G(y) = $\int_a^b f(x,y)dx$, **atunci:**

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d G(y)dy,$$

adică,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$$

În particular, **dacă f este** *continuă* pe D, atunci f este integrabilă pe D, există atât F(x) , x∈ [a, b], cât şi G(y), z ∈ [c, d], prin urmare au loc ambele egalităţi, deci *ordinea de integrare nu contează.*

Teorema 9.1.2.2. Fie $D \subset \mathbf{R}^2$ un domeniu compact măsurabil, simplu față de axa Oy:

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x);\ x \in [a, b]\},$$

unde $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbf{R}$ sunt funcții de clasă C^1 (orice paralelă la axa Oy intersectează frontiera lui D în cel mult două puncte). Dacă funcția $f: D \to \mathbf{R}$ este integrabilă pe D și pentru orice $x \in [a, b]$ funcția $y \to f(x, y)$ este integrabilă pe intervalul $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ atunci funcția $\widetilde{F} : [a, b] \to \mathbf{R}$

$\widetilde{F}(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$ este integrabilă pe [a, b] și are loc egalitatea :

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \widetilde{F}(x)dx, \text{ adică}$$

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right] dx.$$

Observația 9.1.2.2. Dacă domeniul compact măsurabil D este simplu față de Ox, se stabilește un rezultat asemănător, schimbând rolul variabilelor x și y. Dacă D nu este în nici una din aceste situații, se descompune prin paralele la axele de coordonate, într-un număr finit de subdomenii compacte, fără puncte interioare comune și care să fie în una din situațiile de mai sus. Se aplică apoi proprietatea de aditivitate față de domeniu.

Teorema 9.1.2.3. *(Teorema schimbării variabilelor în integrala dublă)*
Fie D, $D^* \subset \mathbf{R}^2$ domenii compacte măsurabile și $T: D^* \to D$ o transformare punctuală $(u, v) \xrightarrow{T} (x, y)$ cu jacobianul neutru în $\overset{\circ}{D}{}^*$ și astfel încât $T(D^*) = D$. Fie $f : D \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci are loc egalitatea :

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| dudv.$$

Observaţia 9.1.2.3. Pentru aplicaţii, găsirea transformării T este esenţială; nu există o metodă generală pentru rezolvarea acestei probleme ci, de la caz la caz, se alege transformarea T în funcţie de forma ecuaţiilor care definesc frontiera domeniului D. Alegerea este bună, dacă noul domeniu D^* este mai simplu, adică dacă integrala dublă pe D^*, obţinută după aplicarea formulei, se descompune mai uşor în integrale simple.

9.1.3. Aplicaţii ale integralelor duble

9.1.3.1. Calculul ariilor

Dacă $D \subset \mathbf{R}^2$ este un domeniu compact, a cărui frontieră este reuniunea imaginilor unui număr finit de curbe netede, atunci *aria lui D* este:

$$a(D) = \iint_D dxdy$$

9.1.3.2. Calculul maselor şi al coordonatelor centrelor de greutate

Dacă domeniul compact măsurabil $D \subset \mathbf{R}^2$ reprezintă o placă materială (de grosime neglijabilă), iar funcţia continuă $\rho : D \to \mathbf{R}^+$ reprezintă densitatea plăcii, atunci *masa plăcii* este dată de:

$$masa(D) = \iint_D \rho(x,y)dxdy,$$

iar *coordonatele centrului de greutate* al plăcii sunt date de:

$$x_G = \frac{1}{masa(D)} \cdot \iint_D x\rho(x,y)dxdy, \; y_G = \frac{1}{masa(D)} \cdot \iint_D y\rho(x,y)dxdy$$

9.1.3.3. Momente de inerţie

Momentul de inerţie al plăcii reprezentată de domeniul compact $D \subset \mathbf{R}^2$ *faţă de originea axelor de coordonate* este dat de:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x,y)dxdy,$$

iar *momentele de inerție față de axele de coordinate* sunt:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x,y)dxdy \,,\; I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y)dxdy$$

9.1.4. Definiția și proprietățile integralei triple

Integrala triplă se definește la fel ca integrala dublă, domeniul compact măsurabil $D \subset \mathbf{R}^2$ fiind înlocuit cu un domeniu compact măsurabil $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. Reamintim că un domeniu compact din $\mathbf{R}^3$ a cărui frontieră este imaginea unei suprafețe netede pe porțiuni este măsurabil Jordan (are volum). În continuare vom considera numai domenii de acest fel.

Definiția 9.1.4.1. Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un domeniu compact măsurabil. Se numește *diviziune* a domeniului Ω, o familie $d = \{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n\}$ de mulțimi cu următoarele proprietăți:

a) fiecare mulțime Ω_i este domeniu compact măsurabil;

b) $\bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i = \Omega$;

c) dacă $i \neq j$, atunci $\overset{\circ}{\Omega}_i \cap \overset{\circ}{\Omega}_j = \emptyset$ ($\overset{\circ}{\Omega}_i$ reprezintă interiorul mulțimii Ω_i).

Se numește *norma diviziunii* d, numărul :

$$\|d\| = \max \{d(\Omega_i);\ i = 1, 2, \ldots, n\},$$

unde $d(\Omega_i)$ reprezintă diametrul mulțimii Ω_i .

Notăm cu $\mathcal{D}$ mulțimea tuturor diviziunilor domeniului Ω.

Definiția 9.1.4.2. Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un domeniu compact măsurabil Jordan și $f : \Omega \to \mathbf{R}$ o funcție mărginită; fie $d = \{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n\}$ o diviziune a domeniului Ω. Pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fie $m_i = \inf f(\Omega_i)$ și $M_i = \sup f(\Omega_i)$ Suma $s_f(d) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot v(\Omega_i)$ se numește *suma inferioară Darboux* asociată funcției f și diviziunii d, iar suma

$S_f(d) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot v(\Omega_i)$ **se numeşte** *suma superioară Darboux* (cu $v(\Omega_i)$ s-a notat volumul domeniului Ω_i). **Se numeşte** *integrala inferioară Darboux* a funcţiei f pe domeniul Ω, **numărul** :

$$\underline{I} = \sup \{s_f(d);\ d \in \mathcal{D}\}$$

iar numărul

$$\overline{I} = \inf \{S_f(d);\ d \in \mathcal{D}\}$$

se numeşte *integrala **superioară** Darboux* a funcţiei f pe domeniul Ω. Funcţia f se numeşte ***integrabilă** pe domeniul Ω în sensul lui Darboux*, dacă integrala inferioară **Darboux coincide** cu integrala superioară. Valoarea lor comună se numeşte ***integrala triplă** a funcţiei f pe domeniul compact Ω în sensul lui Darboux.*

Definiţia 9.1.4.3. Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ **un** domeniu compact măsurabil şi $f : \Omega \to \mathbf{R}$ o funcţie arbitrară; fie $d = \{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n\}$ o diviziune a domeniului Ω. Pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, **fie** $\xi_i \in \Omega_i$ arbitrar; mulţimea de puncte $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ se **numeşte** ***sistem** de puncte intermediare*. Suma:

$$\sigma_f(d, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot v(\Omega_i)$$

se numeşte *suma **Riemann** a* **funcţiei** f corespunzătoare diviziunii d şi sistemului ξ de puncte **intermediare**. Funcţia f se numeşte *integrabilă pe domeniul compact Ω **în sensul lui** Riemann*, dacă există $I \in \mathbf{R}$ **încât**, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$ **astfel ca**, pentru orice $d \in \mathcal{D}$ cu $\|d\| < \eta$ şi pentru orice sistem ξ de **puncte intermediare**, **să** avem:

$$|\sigma_f(d, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Numărul real I, **a cărei unicitate** se dovedeşte imediat, se numeşte *integrala funcţiei f **în sensul lui Riemann** pe domeniul compact Ω.*

Observaţia 9.1.4.1. **În definiţia** 9.1.4.3. nu este necesar să presupunem funcţia f mărginită. **Dacă însă presupunem** că domeniul Ω are diviziuni de normă oricât de mică, **se poate** demonstra că orice *funcţie integrabilă Riemann* pe un asemenea **domeniu** *este mărginită*. De aceea, în continuare, vom considera numai **funcţii mărginite**.

Teorema 9.1.4.1. Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un domeniu compact măsurabil şi $f : \Omega \to \mathbf{R}$ o funcţie mărginită. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) f este integrabilă în sens Darboux pe Ω;
b) pentru orice $\varepsilon > 0$, există $d \in \mathcal{D}$ încât $S_f(d) - s_f(d) < \varepsilon$;
c) pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$, încât pentru orice $d \in \mathcal{D}$ cu $\|d\| < \eta$, avem $S_f(d) - s_f(d) < \varepsilon$;
d) f este integrabilă în sens Riemann pe Ω.

În caz de integrabilitate, $I = \underline{I} = \bar{I}$; de aceea, în cele ce urmează, ne vom referi la funcţii integrabile pe domeniul compact Ω şi la integralele triple, fără a mai preciza sensul şi vom nota :

$$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz .$$

Cea mai importantă consecinţă a teoremei precedente este integrabilitatea funcţiilor continue.

Teorema 9.1.4.2. Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un domeniu compact măsurabil Jordan şi $f : \Omega \to \mathbf{R}$ o funcţie mărginită. Dacă mulţimea $\Omega_1 \subset \Omega$ a punctelor de discontinuitate ale funcţiei f este de măsură Jordan nulă (de volum nul), atunci f este integrabilă pe Ω.

Proprietăţile integralelor duble se reformulează pentru integralele triple. De exemplu:

Teorema 9.1.4.3. *(Formula de medie pentru integrala triplă)*

Dacă funcţia f este integrabilă pe domeniul compact măsurabil Ω şi $m = \inf f(\Omega)$, $M = \sup f(\Omega)$, atunci există $\mu \in [m, M]$ încât:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \mu \cdot v(\Omega).$$

Dacă f este continuă pe Ω, atunci există $(\xi, \tau, \zeta) \subset \Omega$ încât:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = f(\xi, \tau, \zeta) \cdot v(\Omega).$$

9.1.5. Calculul integralelor triple

Teorema 9.1.5.1. Fie $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ şi $f : \Omega \to \mathbf{R}$ o funcţie integrabilă pe Ω. Fie $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Dacă pentru fiecare $(x, y) \in D$ există:

$$F(x, y) = \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)dz,$$

atunci funcţia $F: D \to \mathbf{R}$ astfel definită este integrabilă pe D şi are loc egalitatea:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \iint_{D} F(x, y)dxdy$$

care se mai scrie:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \iint_{D} \left[\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)dz \right] dxdy .$$

Observaţia 9.1.5.1. Schimbând în teoremă rolul variabilelor, se pot obţine încă două formule analoage prin care calculul integralei triple pe un paralelipiped se reduce la calculul unei integrale duble şi al uneia simple.

Teorema 9.1.5..2. Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un domeniu compact măsurabil, simplu faţă de axa Oz: $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \varphi_1(x, y) \le z \le \varphi_2(x, y); (x, y) \in D\}$, $D \subset \mathbf{R}^2$ fiind domeniu compact măsurabil, $\varphi_1, \varphi_2 : D \to \mathbf{R}$ sunt funcţii de clasă C^1 pe D (orice paralelă la axa Oz intersectează frontiera lui Ω în cel mult două puncte). Dacă funcţia $f: \Omega \to \mathbf{R}$ este integrabilă pe Ω şi pentru orice $(x, y) \in D$ funcţia $z \to f(x, y, z)$ este integrabilă pe intervalul $[\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)]$, atunci funcţia $\widetilde{F} : D \to \mathbf{R}$,

$\widetilde{F}(x, y) = \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz$ este integrabilă pe D şi are loc egalitatea:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \iint_{D} \widetilde{F}(x, y)dxdy$$

adică : $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D}\left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dxdy$

Observaţia 9.1.5.2. Dacă domeniul compact măsurabil Ω este simplu faţă dc Ox sau Oy, se stabilesc două formule asemănătoare, schimbând rolul variabilelor. Dacă Ω nu este în nici una din aceste situaţii, se descompune într-un număr finit de subdomenii compacte, fără puncte interioare comune şi care să fie în una din situaţiile de mai sus. Se aplică apoi proprietatea de aditivitatc faţă de domeniu.

Teorema 9.1.5.3. *(Teorema schimbării variabilelor în integrala triplă)*
Fie $\Omega, \Omega^* \subset \mathbf{R}^3$ domenii compacte măsurabile şi T: $\Omega^* \to \Omega$ o transformare punctuală (u, v, w) $\xrightarrow{T}$ (x, y, z) cu jacobianul nenul în interiorul domeniului Ω^* şi astfel încât $T(\Omega^*) = \Omega$. Fie f: $\Omega \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă. Atunci are loc egalitatea:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint_{\Omega^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw$$

Observaţia 9.1.5.3. Transformarea T se alege în funcţie de forma ecuaţiilor suprafeţelor care constituie frontiera domeniului Ω. Alegerea este bună dacă noul domeniu Ω^* este mai simplu, adică dacă integrala triplă pe Ω^*, obţinută după aplicarea formulei, se descompune mai uşor într-o integrală dublă şi una simplă.

9.1.6. Aplicaţii ale integralelor triple

9.1.6.1. Calculul volumelor

Dacă $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ este un domeniu compact a cărui frontieră este reuniunea imaginilor unui număr finit de suprafeţe netede, atunci volumul lui Ω este dat dc

$$v(\Omega) = \iiint_{\Omega} dxdydz .$$

9.1.6.2. Calculul maselor şi al coordonatelor centrelor de greutate

Dacă domeniul compact măsurabil $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ reprezintă un corp material, iar funcţia continuă $\rho : \Omega \to \mathbf{R}^+$ reprezintă densitatea corpului, atunci masa acestui corp este dată de:

$$\text{masa}(\Omega) = \iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)dxdydz ,$$

iar coordonatele centrului său de greutate sunt:

$$x_G = \frac{1}{masa(\Omega)} \iiint_{\Omega} x\rho(x,y,z)dxdydz ,$$

$$y_G = \frac{1}{masa(\Omega)} \iiint_{\Omega} y\rho(x,y,z)dxdydz ,$$

$$z_G = \frac{1}{masa(\Omega)} \iiint_{\Omega} z\rho(x,y,z)dxdydz .$$

9.1.6.3. Momente de inerţie

Momentele de inerţie ale unui corp material reprezentat prin domeniul compact măsurabil $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ de densitate $\rho : \Omega \to \mathbf{R}^+$ sunt:

$$I_O = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$I_{Oxy} = \iiint_{\Omega} z^2 \rho(x,y,z)dxdydz$$

$$I_{Oyz} = \iiint_{\Omega} x^2 \rho(x,y,z)dxdydz$$

$$I_{Oxz} = \iiint_{\Omega} y^2 \rho(x,y,z)dxdydz$$

$$I_{Ox}= \iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$I_{Oy}= \iiint_{\Omega}(x^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$I_{Oz}= \iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

9.2. Tipuri de probleme şi metode de rezolvare

Exercițiul 9.2.1. Să se calculeze $\iint_D f(x,y)dxdy$, unde f :D → **R** este o funcție continuă dată, iar D = {(x, y) ∈ **R** | a ≤ x ≤ b, c ≤ y ≤ d}.

- Se aplică formula: $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx =$

  $= \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$, adică:

- Se calculează $\int_c^d f(x,y)dy = F(x)$;

- Se calculează $\int_a^b F(x)dx = \iint_D f(x,y)dxdy$

sau

- Se calculează $\int_a^b f(x,y)dx = G(y)$;

- Se calculează $\int_c^d G(y)dy = \iint_D f(x,y)dxdy$.

Exercițiul 9.2.2. Să se calculeze $\iint_D f(x,y)dxdy$, unde f :D → **R** este o funcție continuă dată, iar D = {(x, y) ∈ $\mathbf{R}^2$ | $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, $a \le x \le b$}, φ_1 și φ_2 fiind funcții continue pe [a, b].

- Se aplică formula $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$ în sensul că:
- Se calculează $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = F(x)$
- Se calculează $\int_a^b F(x)dx = \iint_D f(x,y)dxdy$

Exercițiul 9.2.3. Să se calculeze $\iint_D f(x,y)dxdy$, unde f :D → **R** este o funcție continuă dată, iar D = {(x, y) ∈ $\mathbf{R}^2$ | $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$, $c \le y \le d$}, ψ_1 și ψ_2 fiind funcții continue pe [c, d].

- Se calculează după formula:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx \right] dy \text{, adică:}$$

- Se calculează $\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx = G(y)$;
- Se calculează $\int_c^d G(y)dy = \iint_D f(x,y)dxdy$.

Exercițiul 9.2.4. Să se calculeze $\iint_D f(x,y)dxdy$ utilizând o schimbare de variabilă convenabilă.

- Considerăm o schimbare de variabilă convenabilă $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$, cu $(u, v) \in D^*$
- Se calculează jacobianul transformării

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

- Se aplică formula :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \cdot |J| dudv$$

- Se calculează ultima integrală folosind una din metodele prezentate la exercițiile 9.2.1, 9.2.2 sau 9.2.3.

Exercițiul 9.2.5. Să se calculeze aria unui domeniu plan dat de D.

- Se aplică formula Aria(D) = $\iint_D dxdy$;
- Se calculează această integrală, folosind una din metodele anterioare.

Exercițiul 9.2.6. Să se calculeze masa unei plăci plane D, de densitate $\rho(x, y) > 0$ dată.

- Se aplică formula M = $\iint_D \rho(x,y)dxdy$
- Se calculează integrala cu una din metodele 9.2.1. – 9.2.4.

Exercițiul 9.2.7. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate G al unei plăci plane D, cu densitatea de masă $\rho(x, y) > 0$.

- Se folosesc formulele:

$$x_G = \frac{1}{M} \cdot \iint_D x\rho(x,y)dxdy$$

$$y_G = \frac{1}{M} \cdot \iint_D y\rho(x,y)dxdy$$

Exercițiul 9.2.8. Să se calculeze momentele de inerție ale unei plăci plane D, cu densitatea $\rho(x, y) > 0$, în raport cu axele Ox și Oy și respectiv în raport cu originea.

- Se utilizează formulele:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x,y)dxdy$$

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y)dxdy$$

$$I_0 = I_x + I_y$$

Exercițiul 9.2.9. Să se calculeze $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$, unde

$f : \Omega \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă dată, iar

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid a \le x \le b, c \le z \le d, e \le y \le f\}$.

- Se calculează $\int_e^f f(x,y,z)dz = F(x,y)$
- Se calculează $\int_c^d F(x,y)dy = G(x)$
- Se calculează $\int_a^b G(x)dx = \iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$.

Se poate schimba eventual ordinea de integrare.

Exercițiul 9.2.10. Să se calculeze $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$, unde $f:\Omega \to \mathbf{R}$ este o funcție dată continuă pe Ω, $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ fiind un domeniu compact măsurabil.

- Dacă domeniul Ω este cuprins între planele $z = c$ și $z = d$ și secțiunea cu planul $z = z_0$, $c \le z_0 \le d$ se proiectează pe planul xOy după domeniul D_z, atunci se aplică formula:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_c^d \left[\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy \right] dz ,$$

în sensul că

- Se calculează $\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy = F(z)$, utilizând una din metodele de calcul ale integralei duble (v. 11.2.1-11.2.4.)
- Se calculează $\int_c^d F(z)dz = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$.
- Dacă domeniul Ω este limitat de o suprafață cilindrică cu generatoarele paralele cu axa Oz, a cărui intersecție cu planul xOy închide domeniul $D \subset \mathbf{R}^2$ de suprafața inferioară $z = \varphi_1(x, y)$, $(x, y) \in D$ și de suprafața superioară $z = \varphi_2(x, y)$, $(x, y) \in D$, atunci integrala se calculează cu formula

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D} \left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dxdy , \text{ adică}$$

- Se calculează $\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz = F(x, y)$
- Se calculează $\iint_{D} F(x,y)dxdy = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ utilizând una din metodele 9.2.1 – 9.2.4.

Exercițiul 9.2.11. Să se calculeze $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$, utilizând o schimbare de variabilă convenabilă.

- Se consideră (u, v, w) $\xrightarrow{T}$ (x, y, z) o schimbare de variabile convenabilă (de exemplu se pot utiliza coordonatele sferice sau cilindrice) scrisă pe componente astfel: $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$, cu (u, v, w) $\in \Omega^*$, Ω^* fiind noul domeniu pe care se face integrarea;
- Se calculează jacobianul transformării:

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix};$$

- Se evaluează expresia f(x, y, z) în funcție de noile variabile u, v și w, obținând f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w));
- Se aplică formula

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\iiint_{\Omega^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot |J| \, dudvdw$$

(pentru calculul acestei din urmă integrale se folosește una din metodele 9.2.9 sau 9.2.10)

Exercițiul 9.2.12. Să se calculeze volumul unui corp dat Ω:

- Se aplică formula $v(\Omega) = \iiint_{\Omega} dxdydz$;

- Se calculează această integrală folosind una din metodele anterioare.

Exercițiul 9.2.13. Să se calculeze masa unui corp material reprezentat de domeniul compact Ω, având densitatea $\rho(x, y, z) = \ldots$

- Se aplică formula $M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)dxdydz$;
- Se calculează integrala obținută cu una din metodele 9.2.9 sau 9.2.10

Exerxițiul 9.2.14. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate G al unui corp dat Ω, cu densitatea $\rho(x, y, z) = \ldots$

- Se aplică formulele din 9.1.6.2.
- Se calculează integralele obținute

Exercițiul 9.2.15. Să se determine momentele de inerție ale unui corp dat Ω, cu densitatea $\rho(x, y, z)$, în raport cu axele și planele coordonate.

- Se utilizează formulele din 9.1.6.3.
- Se calculează integralele obținute

9.3. Exerciții rezolvate

Exercițiul 9.3.1. Să se calculeze integralele:

a) $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dydx$, unde $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | \ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

b) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dydx$, unde $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | \ 1 \le x \le 2, \frac{1}{x} \le y \le x\}$

Soluţie. a) $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dydx = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\,dy\right]dx =$

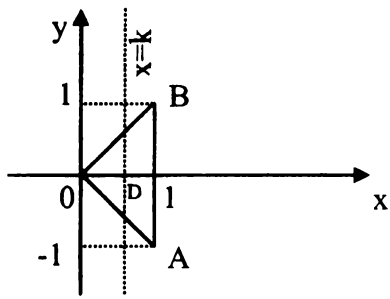
$= \int_0^1 \left[x^2 \cdot arctg\ y\ \Big|_{y=0}^{y=1}\right]dx = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{\pi}{4}\,dx = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{12}$

b) $\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dydx = \int_1^2 \left[\int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy\right]dx = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y}\Big|_{y=\frac{1}{x}}^{y=x}\right]dx =$

$= \int_1^2 (-x+x^3)\,dx = \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{9}{4}$

Exerciţiul 9.3.2. Să se calculeze $\iint_D \sqrt{x^2-y^2}\,dxdy$, unde D este triunghiul cu vârfurile O(0, 0), A(1, -1) şi B(1, 1).

Soluţie. Domeniul D este simplu în raport cu axa Oy (vezi figura) deoarece o dreaptă x = k, k∈ (0, 1) intersectează pe D după un interval.



Dreptele OA şi OB au ecuaţiile:

OA: $\frac{y-0}{-1-0} = \frac{x-0}{1-0}$, adică OA: - y = x

Exercițiul 9.3.4. Să se calculeze următoarele integrale duble, pe domeniile indicate:

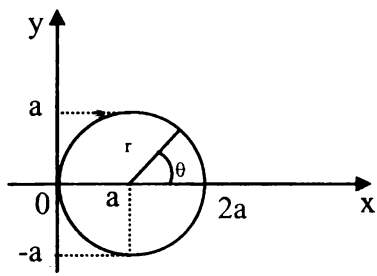
a) $\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$, D fiind domeniul limitat de cercul de ecuație $x^2+y^2= 2ax$;

b) $\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy$, D fiind domeniul limitat de elipsa de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

c) $\iint_D (x^2 + y^2) \cdot ydxdy$, D fiind domeniul limitat de axa Ox şi de porțiunea din cardioida $r = a(a + \cos\theta)$, situată deasupra axei Ox.

Soluții. a) Ecuația cercului ce limitează domeniul D se mai poate scrie: $(x - a)^2 + y^2 = a^2$, deci ea definește cercul cu centrul în punctul de coordonate (a, 0) şi de rază a. Este convenabil să folosim coordonatele polare pentru calculul integralei duble date.

Facem aşadar schimbarea de variabile (x, y) → (r, θ), dată prin transformarea $\begin{cases} x - a = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$



Noul domeniu de integrare (domeniul transformat) este:

$D^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$.

Jacobianul acestei transformări este:

$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\cdot\sin\theta \\ \sin\theta & r\cdot\cos\theta \end{vmatrix} = r\cdot\cos^2\theta + r\cdot\sin^2\theta = r,$$

iar $x^2 + y^2 = a^2 + 2ar\cos\theta + r^2$.

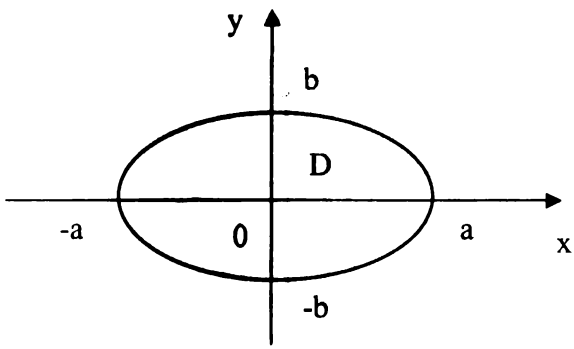
Deci integrala de calculat devine:

$$\iint_{D^*}(a^2 + 2ar\cos\theta + r^2)r\,dr\,d\theta = \int_0^a\left[\int_0^{2\pi}(a^2 r + 2ar^2\cos\theta + r^3)\,d\theta\right]dr$$

$$= \int_0^a\left[(a^2 r + r^3)\cdot\theta\Big|_0^{2\pi}\right]dr + \int_0^a\left[2ar^2\cdot\sin\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\right]dr =$$

$$= 2\pi\int_0^a(a^2 r + r^3)\,dr = 2\pi\left(a^2\cdot\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=a} = \frac{3\pi a^4}{2}.$$

b)Trecem la coordonate polare generalizate: $\begin{cases} x = a\,r\cos\theta \\ y = b\,r\sin\theta \end{cases}$



Domeniul transformat este: $D^* = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$.

Jacobianul transformării este:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cdot \cos\theta & -ar \cdot \sin\theta \\ b \cdot \sin\theta & br \cdot \cos\theta \end{vmatrix} = abr,$$

iar $\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = \sqrt{1 - r^2}$.

Aşadar, integrala devine:

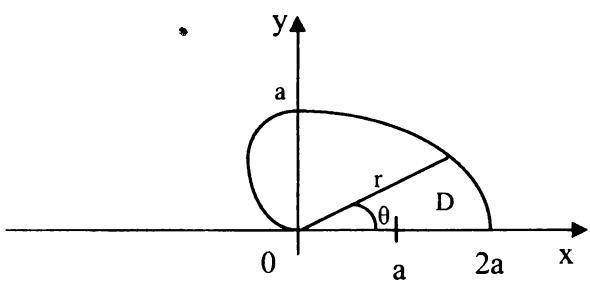
$$\iint_D abr\sqrt{1-r^2}\,dr d\theta = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} abr\sqrt{1-r^2}\,d\theta \right] dr =$$

$$ab \int_0^1 \left[r\sqrt{1-r^2} \cdot \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right] dr = ab \int_0^1 2\pi r\sqrt{1-r^2}\,dr = 2\pi ab \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$= -\pi ab \int_0^1 (1-r^2)'\sqrt{1-r^2}\,dr = -\pi ab(1-r^2)^{3/2} \cdot \frac{2}{3}\Big|_0^1 = \frac{2\pi ab}{3}.$$

c) Trecem la coordonate polare: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$. Domeniul pe care se face integrarea este D (vezi figura), iar D^* este :

$$D^* = \{(r, \theta) \mid 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le r \le a(1 + \cos\theta)\}.$$



Avem $(x^2 + y^2)y = r^3\sin\theta$ şi **J = r. Deci:**

$$\iint_D (x^2 + y^2)\cdot y dxdy =$$

$$= \int_0^{\pi}\left[\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^4 \sin\theta dr\right] d\theta = \int_0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\sin\theta\Big|_{r=0}^{r=a(1+\cos\theta)}\right] d\theta =$$

$$= \frac{a^5}{5}\int_0^{\pi}\left[(1+\cos\theta)^5 \sin\theta\right] d\theta = \frac{a^5}{5}\left[\frac{-(1+\cos\theta)^6}{6}\right]\Bigg|_0^{\pi} = \frac{32a^5}{15}$$

Exerciţiul 9.3.5. Să se calculeze aria interiorului elipsei de ecuaţie:

$$(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$$

Soluţie. Folosim formula: **Aria (D)** = $\iint_D dxdy$, unde D este interiorul elipsei.

Efectuăm schimbarea de variabilă (x, y) $\to$(u, v) dată prin:

$$\begin{cases} x - 2y = u \\ 3x + 4y = v \end{cases}, (u, v) \in D^*$$

$$D^* = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 | (u+3)^2 + (v-1)^2 \le 100\}$$

Jacobianul acestei transformări este:

$$J^* = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \left[\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right]^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}$$

Deci: Aria(D) = $\iint_{D^*} J^* dudv = \iint_{D^*} \frac{1}{10} dudv = \frac{1}{10}\iint_{D^*} dudv$.

Pentru calculul acestei din urmă integrale trecem la coordonate polare: $\begin{cases} u + 3 = r\cos\theta \\ v - 1 = r\sin\theta \end{cases}$, unde $(r, \theta) \in D^{**}$,

$$D^{**} = \{(r, \theta) | \ 0 \le r \le 10, \ 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

Jacobianul transformării este în acest caz J = r, iar

$$\iint_{D^*} dudv = \iint_{D^*} Jdrd\theta = \int_0^{10} \left[\int_0^{2\pi} rd\theta \right] dr = \int_0^{10} \left(r \cdot d\theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right) dr =$$

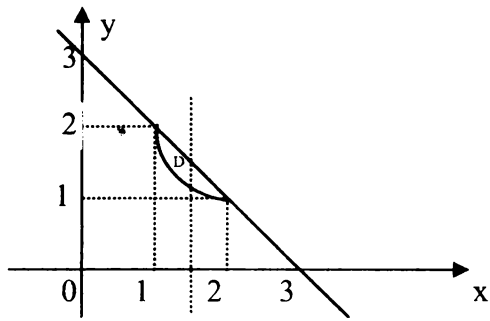
$$= \int_0^{10} r \cdot 2\pi dr = 2\pi \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^{r=10} = 100\pi$$

Deci: Aria(D) = $\frac{1}{10} \iint_{D^*} dudv = 10\pi$.

Exercițiul 9.3.6. Să se calculeze masa unei plăci plane D, limitate de $x + y = 3$, $xy = 2$ și a cărei densitate este $\rho(x, y) = xy$.

Soluție. $M = \iint_D \rho(x, y)dxdy = \iint_D xydxdy$. Domeniul D poate fi caracterizat astfel (așa cum se vede din figură):

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | \ 1 \le x \le 2, \ \frac{2}{x} \le y \le 3 - x\}$$

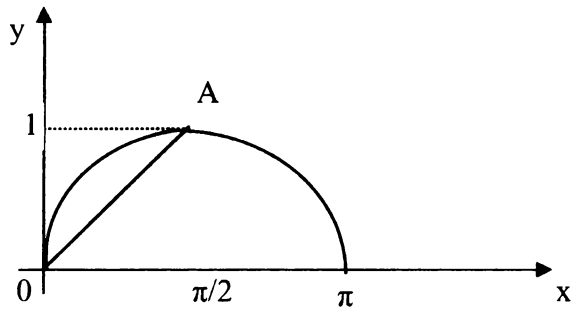


Atunci:

$$M = \int_1^2 \int_{2/x}^{3-x} xy\,dxdy = \int_1^2 \left[x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=\frac{2}{x}}^{y=3-x} \right] dx = \int_1^2 \left[\frac{9x - 6x^2 + x^3}{2} - \frac{2}{x} \right] dx$$

$$= \left(\frac{9}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} - 2\ln x \right) \Big|_1^2 = \frac{18}{3} - 2\ln 2 .$$

Exercițiul 9.3.7. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al plăcii plane omogene din figura de mai jos, limitat de curba y = sin x și dreapta OA care trece prin origine și punctul $A\left(\frac{\pi}{2},1\right)$.



Soluție. Dreapta OA are ecuația OA: $y = \frac{2x}{\pi}$. Deci,

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \frac{2x}{\pi} \le y \le \sin x\}$$

Se calculează $M = \iint_D \rho(x, y)dxdy = k \iint_D dxdy$, unde ρ(x, y) = k = const fiind vorba de o placă omogenă.

Avem:

$$\iint_D dxdy = \int_0^{\pi/2}\left[\int_{2x/\pi}^{\sin x} dy\right]dx = \int_0^{\pi/2}\left(\sin x - \frac{2x}{\pi}\right)dx = 1 - \frac{\pi}{4},$$

şi deci $M = k\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

Pe de altă parte,

$$\iint_D x\rho(x,y)dxdy = k \iint_D xdxdy$$

$$= k\int_0^{\pi/2}\left[\int_{2x/\pi}^{\sin x} xdy\right]dx = k\int_0^{\pi/2} x\left(\sin x - \frac{2x}{\pi}\right)dx$$

$$= k\int_0^{\pi/2} x\sin xdx - \frac{2k}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -kx\cdot\cos x\Big|_0^{\pi/2} + k\int_0^{\pi/2}\cos xdx - \frac{2k}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{24} = k\cdot\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \frac{k\pi^2}{12}$$

$$= k - \frac{k\pi^2}{12} = k\left(1 - \frac{\pi^2}{12}\right).$$

Deci $x_G = \frac{1}{M}\iint_D x\rho(x,y)dxdy = \frac{k\left(1-\frac{\pi^2}{12}\right)}{k\left(1-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{12-\pi^2}{3(4-\pi)}$.

$$\iint_D y\rho(x,y)dxdy = k \iint_D ydxdy =$$

$$\int_0^{\pi/2}\left[\int_{2x/\pi}^{\sin x} ydy\right]dx = k\int_0^{\pi/2}\left[\frac{y^2}{2}\Big|_{y=\frac{2x}{\pi}}^{y=\sin x}\right]dx =$$

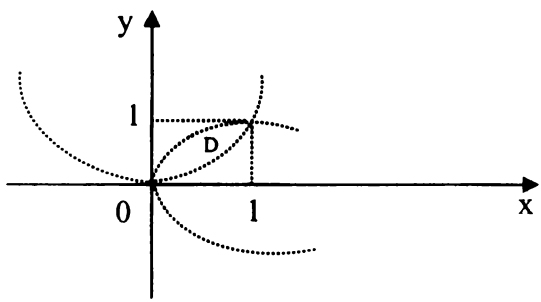
$$= \frac{k}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2 x - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)dx = \frac{k}{2}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2x}{2}dx - \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi/2}\right]$$

$$= \frac{k}{2}\left[\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\pi}{6}\right] = \frac{k}{2}\cdot\frac{\pi}{12} = \frac{k\pi}{24}$$

Deci $y_G = \frac{1}{M}\iint_D y\rho(x,y)dxdy = \frac{\frac{k\pi}{24}}{k\left(1-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\pi}{6(4-\pi)}$.

Exercițiul 9.3.8. Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele de coordonate pentru placa omogenă mărginită de curbele $y = x^2$, $x = y^2$.

Soluție.



Domeniul D este caracterizat de:

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$$

Deci $I_x = \iint_D y^2 \rho(x,y)dxdy = k \iint_D y^2 dxdy = k \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y^2 dy \right] dx =$

$$= k \int_0^1 \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} \right) dx = k \int_0^1 \left(\frac{x^{3/2}}{3} - \frac{x^6}{3} \right) dx = k \left(\frac{x^{5/2}}{3} \cdot \frac{2}{5} - \frac{x^7}{21} \right) \Big|_0^1 dx =$$

$$= \frac{3k}{35}.$$

Analog $I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y)dxdy = k \iint_D x^2 dxdy = k \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 dy \right] dx =$

$$= k \int_0^1 x^2 (\sqrt{x} - x^2)dx = k \int_0^1 (x^{5/2} - x^4)dx = \frac{3k}{35}.$$

Exercițiul 9.3.9. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\iiint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x+y+z+1}} dxdydz$, unde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$$

b) $\iiint_\Omega xyzdxdydz$, unde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | 0 \le z \le 1 - x - y, 0 \le y \le 1 - x, 0 \le x \le 1\}$$

Soluţii. a) Avem:

$$\iiint_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{x+y+z+1}}dxdydz = \int_0^1\left[\int_0^1\left[\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x+y+z+1}}dx\right]dy\right]dz =$$

$$\int_0^1\left[\int_0^1\left[(x+y+z+1)^{1/2}\cdot 2\Big|_{x=0}^{x=1}\right]dy\right]dz =$$

$$= 2\int_0^1\left[\int_0^1\left[(y+z+2)^{1/2}-(y-z+1)^{1/2}\right]dy\right]dz =$$

$$= 2\int_0^1\left[(y+z+2)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}-(y+z+1)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\Big|_{y=0}^{y=1}\right]dz =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^1\left[(z+3)^{3/2}-(z+2)^{3/2}-(z+2)^{3/2}+(z+1)^{3/2}\right]dz =$$

$$= \frac{4}{3}\left[(z+3)^{5/2}\frac{2}{5}-(z+2)^{5/2}\frac{2}{5}-(z+2)^{5/2}\frac{2}{5}+(z+1)^{5/2}\frac{2}{5}\right]\Big|_{z=0}^{z=1}$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{5}\left[4^{5/2}-3^{5/2}-3^{5/2}+2^{5/2}-3^{5/2}+2^{5/2}+2^{5/2}-1\right] =$$

$$= \frac{8}{15}\left[4^{5/2}-3^{7/2}+3\cdot 2^{5/2}-1\right] = \frac{8}{15}\left(31+12\sqrt{2}-27\sqrt{3}\right).$$

b) $$\iiint_{\Omega}xyzdxdydz = \iint_D\left[\int_0^{1-x-y}xyzdz\right]dxdy = \iint_D xy\frac{z^2}{2}\Big|_{z=0}^{z=1-x-y}dxdy =$$

$$\frac{1}{2}\iint_D xy(1-x-y)^2dxdy = \frac{1}{2}\iint_D xy(1+x^2+y^2-2x-2y+2xy)dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D (xy + x^3y + xy^3 - 2x^2y - 2xy^2 + 2x^2y^2)dxdy,$$

unde $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: 0 \le y \le 1 - x, 0 \le x \le 1\}$

Prin urmare,

$$\iiint_\Omega xyzdxdydz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (xy + x^3y + xy^3 - 2x^2y - 2xy^2 + 2x^2y^2)dy \right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left(x\frac{y^2}{2} + x^3\frac{y^2}{2} + x\frac{y^4}{4} - x^2y^2 - 2x\frac{y^3}{3} + 2x^2\frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x} \right] dx$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{x}{2}(1-x)^2 + \frac{x^3}{2}(1-x)^2 + \frac{x}{4}(1-x)^4 - x^2(1-x)^2 - \frac{2x}{3}(1-x)^3 \right] dx$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^1 (x - 4x^2 + 6x^3 - 4x^4 + x^5)dx =$$

$$= \frac{1}{24}\left(\frac{x^2}{2} - 4\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{720}$$

Exercițiul 9.3.10. Să se calculeze următoarele integrale:

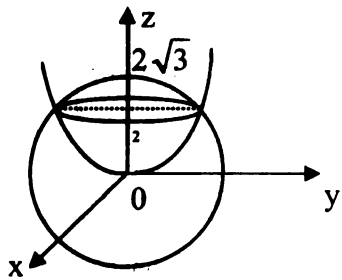
a) $\iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$, unde Ω este domeniul mărginit de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ și paraboloidul $x^2 + y^2 = 4z$;

b) $\iiint_\Omega \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz$, unde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3: x^2 + y^2 \le 9, z \ge 0, x + y + z \le 6\}$$

Soluții. a) Cele două suprafețe se intersectează după cercul:

(C): $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ z = 2 \end{cases}$. Evident $0 \le z \le 2\sqrt{3}$



Aplicăm deci formula:

$$\iiint_{\Omega}(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz = \int_0^{2\sqrt{3}}\left[\iint_{D_z}(x^2 + y^2 + z^2)dxdy\right]dz,$$

unde D_z este proiecția pe planul xOy a unei secțiuni făcute în Ω cu un plan $z = z_0$, $z_0 \in [0, 2\sqrt{3}]$. D_z, este caracterizat de:

$(D_z'): x^2 + y^2 \le 4z$, dacă $z \in [0, 2]$ și

$(D_z''): x^2 + y^2 \le 12 - z^2$, dacă $z \in [2, 2\sqrt{3}]$

Deci $\iiint_{\Omega}(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz = \int_0^2\left[\iint_{D_z'}(x^2 + y^2 + z^2)dxdy\right]dz +$

$$+ \int_2^{2\sqrt{3}}\left[\iint_{D_z''}(x^2 + y^2 + z^2)dxdy\right]dz$$

Pentru calculul integralelor duble folosim coordonatele polare, întrucât (D_z') și (D_z'') sunt discuri.

Pentru prima integrală dublă avem:

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $r \in [0, 2\sqrt{z}]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, iar jacobianul este J = r.

Deci,

$$\iint_{D_z}(x^2+y^2+z^2)dxdy = \int_0^{2\sqrt{z}}\left[\int_0^{2\pi}(r^2+z^2)\cdot rd\theta\right]dr = 2\pi\int_0^{2\sqrt{z}} r(r^2+z^2)dr$$

$$= 2\pi\left[\frac{r^4}{4}+z^2\cdot\frac{r^2}{2}\right]\Bigg|_{r=0}^{r=2\sqrt{z}} = 4\pi z^2(2+z).$$

Pentru cea de a doua integrală dublă, avem:

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $r \in [0, \sqrt{12-z^2}]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Deci,

$$\iint_{D_z}(x^2+y^2+z^2)dxdy = \int_0^{\sqrt{12-z^2}}\left[\int_0^{2\pi}(r^2+z^2)\cdot rd\theta\right]dr =$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{12-z^2}} r(r^2+z^2)dr = \frac{\pi}{2}(144-z^4)$$

Aşadar,

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz =$$

$$\int_0^2 4\pi z^2(2+z)dz + \int_2^{2\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}(144-z^4)dz = \frac{32\pi}{5}(18\sqrt{3}-\frac{97}{6})$$

b) Suntem îm situația a doua de la exercițiul 9.3.2. pentru

$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x^2+y^2 \le 9\}$, $\varphi_1(x, y) = 0$ şi $\varphi_2(x, y) = 6 - x - y$

Aplicăm deci formula adecvată, adică:

$$\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \iint_{D}\left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\right]dxdy.$$

Deci

$$\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \iint_{D}\left[\int_{0}^{6-x-y}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\right]dxdy$$

$$= \iint_{D}\sqrt{x^2+y^2}\cdot(6-x-y)dxdy$$

Calculăm această integrală prin trecere la coordonate polare. Avem:

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, r ∈ [0, 3]; θ∈ [0, 2π].

$$\iint_{D}\sqrt{x^2+y^2}\cdot(6-x-y)dxdy =$$

$$\int_{0}^{2\pi}\left[\int_{0}^{3} r^2\cdot(6-r\cos\theta-r\sin\theta)dr\right]d\theta =$$

$$\int_{0}^{2\pi}\left[\left(6\cdot\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}\cos\theta-\frac{r^4}{4}\sin\theta\right)\Bigg|_{r=0}^{r=3}\right]d\theta =$$

$$\int_{0}^{2\pi}\left[54-\frac{3^4}{4}\cos\theta-\frac{3^4}{4}\sin\theta\right]d\theta = 108\pi$$

Exercițiul 9.3.11. Să se calculeze următoarele integrale triple:

a) $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$, unde

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3: y^2 + z^2 \le x^2, x^2 + y^2 + z^2 \le 4, x \ge 0\}$;

b) $\iiint_{\Omega} z\,dxdydz$, unde Ω este domeniul limitat de conul

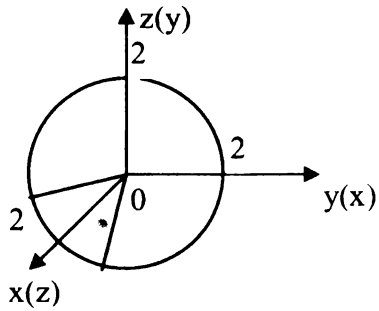
$$z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$$ şi planul z = h;

c) $\iiint_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz$, unde Ω este domeniul mărginit de elipsoidul $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Soluţii. a) Este convenabil să folosim transformarea:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\theta\sin\varphi \end{cases}$$

Noile variabile de integrare sunt r, θ, φ, iar pentru a determina domeniul Ω^* (domeniul transformat), înlocuim x(r, θ, φ), y(r, θ, φ), z (r, θ, φ) în inecuaţiile ce definesc domeniul Ω.



Din $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ rezultă $r^2 \le 4$, deci $r \in [0, 2]$.
Din $y^2 + z^2 \le x^2$ deducem că $r^2\sin^2\theta \le r^2\cos^2\theta$, adică $\sin^2\theta \le \cos^2\theta$, ceea ce este echivalent cu $\sin^2\theta \le \frac{1}{2}$. (1)

Din $x \geq 0$ rezultă $r\cos\theta \geq 0$, adică $\cos\theta \geq 0$, de unde $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. (2)

Din (1) şi (2) avem $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Deci $\Omega^* = \left\{(r,\theta,\varphi) \mid r \in [0,2], \theta \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right], \varphi \in [0,2\pi]\right\}$.

Jacobianul transformării este:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$= r^2 \sin\theta$.

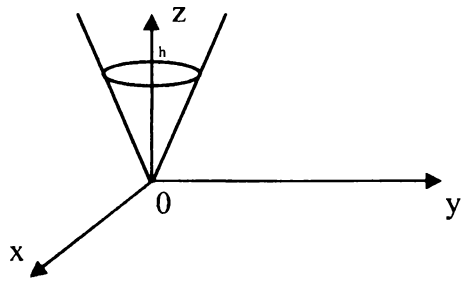
Integrala de calculat devine:

$$\int_0^2 \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\pi} r^4 \sin\theta \, d\varphi \right) d\theta \, dr = 2\pi \int_0^2 \left(\int_0^{\pi/4} r^4 \sin\theta \, d\theta \right) dr =$$

$$= 2\pi \int_0^2 \left[r^4 (-\cos\theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \right] dr = \pi(2-\sqrt{2}) \int_0^2 r^4 \, dr =$$

$$= \pi(2 - \sqrt{2}) \cdot \frac{r^5}{5}\Big|_{r=0}^{r=2} = \frac{2^5 \cdot \pi \cdot (2-\sqrt{2})}{5}.$$

b) Domeniul pe care se face integrarea este:



Este convenabil să folosim coordonatele cilindrice:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Avem $z \in [0, h]$, $0 \in [0, 2\pi]$ iar $z^2 \geq \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ ne dă $r \in \left[0, \frac{zR}{h}\right]$.

Aşadar, $\Omega^* = \{(r,\theta,z) \mid 0 \leq r \leq \frac{zR}{h}, \theta \in [0,2\pi], z \in [0,h]\}$.

Jacobianul este:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Integrala devine:

$$\int_0^h \left[\int_0^{zR/h} \left[\int_0^{2\pi} zrd\theta \right] dr \right] dz = 2\pi \int_0^h \left[\int_0^{zR/h} zrdr \right] dz = 2\pi \int_0^h z \frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^{r=zR/h} dz =$$

$$= 2\pi \int_0^h \left(\frac{z}{2} \cdot \frac{z^2 R^2}{h^2} \right) dz = \pi \int_0^h \frac{z^3 R^2}{h^2} dz = \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot \int_0^h z^3 dz = \frac{\pi R^2 h^2}{4}$$

d)Vom folosi coordonatele sferice generalizate, adică:

$$\begin{cases} x = \arcsin \theta \cos \varphi \\ y = br \sin \theta \sin \varphi \\ z = cr \cos \theta \end{cases}$$

Avem $\Omega^* = \{(r, \theta, \varphi) \mid r \in [0, 1], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ iar

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = abcr^2 \sin \theta.$$

Integrala devine:

$$\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} abcr^2 \sin \theta \sqrt{1 - r^2}\, d\varphi d\theta dr = 2\pi abc \int_0^1 \int_0^\pi r^2 \sqrt{1 - r^2} \sin \theta d\theta dr$$

$$= 2\pi abc \int_0^1 \left[r^2 \sqrt{1 - r^2} \cdot (-\cos \theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \right] dr = 4\pi abc \int_0^1 r^2 \sqrt{1 - r^2}\, dr .$$

Pentru calculul acestei din urmă integrale facem schimbarea de variabilă $r = \sin t$.

Deci

$$\int_0^1 r^2 \sqrt{1 - r^2}\, dr = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt =$$

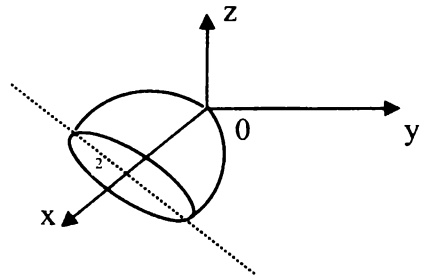
$$= \frac{1}{8} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{16}.$$

Deci: $\iiint_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz$

$$= 4\pi abc\cdot\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,dr = 4\pi abc\frac{\pi}{16} = \frac{\pi^2 abc}{4}.$$

Exercițiul 9.3.12. Să se calculeze volumul corpului mărginit de paraboloidul $x = \frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}$ și planul de ecuație $x = 2$.

Soluție. Corpul Ω al cărui volum trebuie să-l aflăm, este reprezentat în figura următoare:



Vom folosi coordonate cilindrice generalizate:

$$\begin{cases} x = x \\ y = 3r\cos\theta \\ z = 4r\sin\theta \end{cases}, \; x\in[0,2],\ \theta\in[0,2\pi].$$

Din $x \geq \frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}$ rezultă că $x \geq r^2$, deci $0 \leq r \leq \sqrt{x}$.

Așadar, $\Omega^* = \{(r, \theta, x) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{x},\ \theta\in[0,2\pi],\ x\in[0,2]\}$.

Jacobianul transformării este : $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,x)} = 12r$.

Volumul este:

$$\text{Vol}(\Omega) = \iiint_{\Omega} dxdydz = \iiint_{\Omega} \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,x)} d\theta dr dx = 12 \iiint_{\Omega} r d\theta dr dx =$$

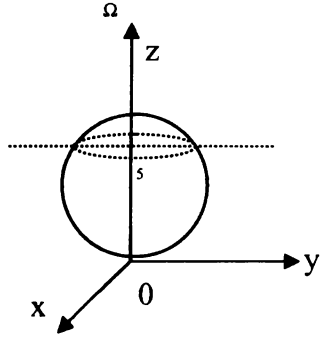
$$= 24\pi \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{x}} r dr \right) dx = 24\pi \int_0^2 \left[\frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{x}} \right] dx = 12\pi \int_0^2 x dx =$$

$$= 12\pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 24\pi$$

Exercițiul 9.3.13. Să se calculeze masa corpului Ω, mărginit de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 10z$, știind că densitatea în fiecare punct este:

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Soluție. Se aplică formula $M = \iiint_{\Omega} \rho(x,y,z) dxdydz$.



Avem $z \in [0, 10]$ și (D_z): $x^2 + y^2 \leq 10z - z^2$.

Deci $M = \int_0^{10} \left[\iint_{D_z} \rho(x,y,z) dxdy \right] dz$.

Pentru calculul integralei duble folosim coordonatele polare. Deci $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, iar $D_z^* = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le \sqrt{10z - z^2}\ , \theta \in [0, 2\pi]\}$

Avem, aşadar :

$$\iint_{D_z} \rho(x, y, z)dxdy = \int_0^{\sqrt{10z-z^2}} \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2 + z^2} rd\theta \right] dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{10z-z^2}} \frac{1}{r^2 + z^2} dr$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{10z-z^2}} \frac{(r^2 + z^2)'}{r^2 + z^2} dr = \pi \cdot \ln\left(r^2 + z^2\right)\Big|_{r=0}^{r=\sqrt{10z-z^2}} =$$

$= \pi \ln (10z) - \pi \ln (z^2)$.

Deci, $M = \int_0^{10} [\pi \ln(10z) - \pi \ln(z^2)]dz = \pi \int_0^{10} \ln\left(\frac{10}{z}\right) dz =$

$$= \pi \int_0^{10} \ln 10 dz - \pi \int_0^{10} \ln z dz = \pi \cdot 10 \cdot \ln 10 - \pi \int_0^{10} (z)' \ln z dz =$$

$$= 10\,\pi \ln 10 - 10\,\pi \ln 10 + \pi \int_0^{10} dz = \pi \cdot z\Big|_0^{10} = 10\pi .$$

Exerciţiul 9.3.14. Să se determine coordonatele centrului de greutate ale segmentului cilindric omogen:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \le 9,\ 0 \le z \le 2y\}$$

Soluţie. Corpul fiind omogen, funcţia ρ este constantă.

Deci, $x_G = \frac{1}{v(\Omega)} \cdot \iiint_\Omega xdxdydz$; $y_G = \frac{1}{v(\Omega)} \cdot \iiint_\Omega ydxdydz$;

$z_G = \frac{1}{v(\Omega)} \cdot \iiint_\Omega zdxdydz$.

Notând $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \le 9,\ y \ge 0\}$. Avem:

- $v(\Omega)= \iiint_{\Omega} dxdydz = \iint_{D}\left(\int_{0}^{2y} dz\right)dxdy = \iint_{D} 2ydxdy =$

$$= 2\iint_{D} ydxdy = 2\iint_{D^*} r^2 \sin\theta dr d\theta = 2\int_{0}^{3}\left(\int_{0}^{\pi} r^2 \sin\theta d\theta\right)dr$$

$$= 2\int_{0}^{3}\left[r^2(-\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}\right]dr = 4\int_{0}^{3} r^2 dr = 4\frac{r^3}{3}\Big|_{0}^{3} = 36$$

- $\iiint_{\Omega} xdxdydz = \iint_{D}\left(\int_{0}^{2y} xdz\right)dxdy = \iint_{D} xz\Big|_{z=0}^{z=2y} dxdy =$

$$= \iint_{D} 2xydxdy = 2\iint_{D^*} r^3 \sin\theta\cos\theta dr d\theta =$$

$$= \int_{0}^{3} r^3 dr \cdot \int_{0}^{\pi} \sin 2\theta d\theta = \frac{r^4}{4}\Big|_{0}^{3} \cdot \left(-\frac{\cos 2\theta}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi} = 0$$

- $\iiint_{\Omega} ydxdydz = \iint_{D}\left(\int_{0}^{2y} ydz\right)dxdy = \iint_{D} yz\Big|_{z=0}^{z=2y} dxdy =$

$$= \iint_{D} 2y^2 dxdy = 2\iint_{D^*} r^3 \sin^2\theta dr d\theta =$$

$$= \frac{r^4}{4}\Big|_{0}^{3} \cdot \int_{0}^{\pi}(1-\cos 2\theta)d\theta = \frac{3^4}{4}\left(\pi - \frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_{0}^{\pi}\right) = 3^4\frac{\pi}{4}$$

- $\iiint_{\Omega} zdxdydz = \iint_{D}\left(\int_{0}^{2y} zdz\right)dxdy = \iint_{D} \frac{z^2}{2}\Big|_{z=0}^{z=2y} dxdy =$

$$= \frac{1}{2}\iint_D 4y^2 dxdy = 2\iint_D y^2 dxdy = 3^4 \frac{\pi}{4}.$$

Rezultă $x_G = 0$; $y_G = z_G = \frac{1}{36} \cdot 3^4 \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{16}$.

Exercițiul 9.3.15. Să se calculeze momentele de inerție în raport cu planele de coordonate ale corpului material omogen, limitat de suprafețele $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ și $z = c$.

Soluție. $I_{xOy} = \iiint_\Omega z^2 dxdydz$ (corpul fiind omogen, considerăm densitatea egală cu unitatea).

Trecem la coordonate cilindrice generalizate:

$$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \\ z = z \end{cases}, z \in [0, c], \theta \in [0, 2\pi]$$

Din $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le \frac{z^2}{c^2}$, obținem $r^2 \le \frac{z^2}{c^2}$, de unde $0 \le r \le \frac{z}{c}$.

Deci $\Omega^* = \{(r, \theta, z) \mid 0 \le r \le \frac{z}{c}, \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, c]\}$, iar jacobianul transformării este $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)} = abr$.

- $I_{xOy} = ab \iiint_{\Omega^*} z^2 r d\theta dr dz = 2\pi ab \int_0^c \left(\int_0^{z/c} z^2 r dr \right) dz =$

$$= 2\pi ab \int_0^c \left[z^2 \frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{r=\frac{z}{c}} \right] dz = \frac{\pi ab}{c^2} \int_0^c z^4 dz = \frac{\pi ab}{c^2} \cdot \frac{z^5}{5}\Big|_0^c = \frac{\pi abc^3}{5}$$

- $I_{yOz} = \iiint_\Omega x^2 dxdydz = a^3 b \iiint_{\Omega'} r^3 \cos^2\theta d\theta dr dz =$

$$= a^3 b \int_0^c \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{z/c} r^3 \cos^2\theta dr \right] d\theta dz = \frac{a^3 b}{4} \int_0^c \int_0^{2\pi} \frac{z^4}{c^4} \cos^2\theta d\theta dz =$$

$$= \frac{a^3 b}{4c^4} \int_0^c \left(\int_0^{2\pi} \frac{z^4 (1+\cos 2\theta)}{2} d\theta \right) dz = \frac{a^3 b}{8c^4} \int_0^c z^4 \cdot 2\pi dz +$$

$$+ \frac{a^3 b}{8c^4} \int_0^c \left[z^4 \cdot \frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right] dz = \frac{\pi a^3 b}{4c^4} \cdot \frac{z^5}{5}\Big|_{z=0}^{z=c} = \frac{\pi a^3 bc}{20}$$

- $I_{xOz} = \iiint_\Omega y^2 dxdydz = ab^3 \iiint_{\Omega'} r^3 \sin^2\theta d\theta dr dz =$

$$= ab^3 \int_0^c \int_0^{2\pi} \frac{z^4}{4c^4} \sin^2\theta d\theta dz = \frac{ab^3}{4c^4} \int_0^c \int_0^{2\pi} \frac{z^4 (1-\cos 2\theta)}{2} d\theta dz =$$

$$= \frac{ab^3}{8c^4} \int_0^c z^4 \cdot 2\pi dz - \frac{ab^3}{8c^4} \int_0^c \left[z^4 \cdot \frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right] dz =$$

$$= \frac{\pi ab^3}{4c^4} \cdot \frac{z^5}{5}\Big|_{z=0}^{z=c} = \frac{\pi ab^3 c}{20}$$

9.4. Exerciții propuse

Exercițiul 9.4.1. Să se calculeze integralele următoare:

a) $\iint_D \frac{\sqrt{xy}}{x+1} dxdy$, unde D = [0, 3] x [0, 1]

b) $\iint_D \frac{dxdy}{(1+xy)^2}$, unde D = [0, 1] x [0, 1]

c) $\iint_D \frac{y}{1+xy} dxdy$, unde D = [0, 1] x [0, 1]

d) $\iint_D \frac{\cos y}{1+\sin x \sin y} dxdy$, unde D = $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ x $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

e) $\iint_D \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}(1+xy)} dxdy$, unde D = [1, 3] x [0, 1]

R. a) $\frac{4}{3}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$; b) ln 2; c) 2 ln 2 – 1; d) $\frac{\pi^2}{8}$; e) 2 - $\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{9}$.

Exercițiul 9.4.2. Să se calculeze $\iint_D f(x, y)dxdy$ în fiecare din cazurile următoare:

a) f(x, y) = $\frac{x^2}{y^2}$, D = {(x, y)$\in \mathbf{R}^2$ | 1 $\leq$ x $\leq$ 2, $\frac{1}{x} \leq y \leq x$}

b) f(x, y) = $\sqrt{1-x^2-y^2}$, D = {(x, y)$\in \mathbf{R}^2$ |0$\leq$ x $\leq$ 1, 0 $\leq$ y $\leq \sqrt{1-x^2}$ }

c) f(x, y) = $y^2 \sin x$, D = {(x, y)$\in \mathbf{R}^2$ | 0 $\leq$ x $\leq \pi$, 0 $\leq$ y $\leq$1 + cos x}

d) f(x, y) = x + 2y, D = {(x, y)$\in \mathbf{R}^2$ | -3 $\leq$ y $\leq$ 3, $y^2 - 4 \leq x \leq 5$}

e) f(x, y) = $y e^{x^2}$, D = {(x, y)$\in \mathbf{R}^2$ | 0 $\leq$ y $\leq$ 1, $y^2 \leq x \leq y^{2/3}$}

f) $f(x, y) = x^2\sin^2 y$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le x \le 3\cos y\}$

R. a) $\frac{9}{4}$; b) $\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{4}{3}$; d) 50,4; e) $\frac{e-2}{4}$; f) $\frac{12}{5}$

Exercițiul 9.4.3. Să se calculeze următoarele integrale duble:

a) $\iint_D (y^2 - x^2)dxdy$, D: $\begin{cases} 1 \le x + y \le 5 \\ 0 \le y - x \le 3 \end{cases}$

b) $\iint_D (x + y)dxdy$, D fiind domeniul mărginit de dreptele x = y, x + y = 2, y = 0

c) $\iint_D \frac{1}{(x+y)^4}dxdy$, D fiind domeniul determinat de $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 1 \\ x + y \le 4 \end{cases}$

d) $\iint_D xydxdy$, D fiind domeniul mărginit de parabola $y = x^2$ și dreapta de ecuație y = 2x + 3

e) $\iint_D \frac{y}{1+y}dxdy$, D fiind domeniul mărginit de parabola $y = x^2 + 1$ și dreptele y = 2x, x = 0.

f) $\iint_D \frac{y^2}{x^2 + y^2}dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4, -x \le y \le x\}$

g) $\iint_D \sqrt{xy}dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \ge x^3, y \le x^2, x \ge 0\}$

h) $\iint_D \sqrt{1+y}dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \le x, xy \ge 1, 1 \le x \le 2\}$

R. a) 27; b) $\frac{4}{3}$; c) $\frac{1}{48}$; d) $53 + \frac{1}{3}$; e) $-\frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{8}\ln 3$; f) $\frac{3}{8}(\pi - 2)$; g) $\frac{2}{135}$; h) $1 - 2\ln\frac{3}{2}$.

Exercițiul 9.4.4. Utilizând coordonatele polare sau o schimbare de variabilă convenabilă, să se calculeze:

a) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 4\}$

b) $\iint_D \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2 + 1}dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$

c) $\iint_D \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3 dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 4, y \ge 0\}$

d) $\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$

e) $\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2}\,dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 9\}$

f) $\iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le e^2\}$

g) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 2x\}$

h) $\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4}}dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \le 1, y \le 0\}$

i) $\iint_D (x + y)dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}$

j) $\iint_D xdxdy$, D este domeniul limitat de curba de ecuație

$$\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}\right)^2=\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}$$

k) $\iint_D (x+3)dxdy$, D : $(2x-y+1)^2+(x+3y-4)^2=49$

l) $\iint_D xydxdy$, unde D este limitat de axele de coordonate și arcul de astroidă $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

m) $\iint_D \left(a^{2/3}-x^{2/3}-y^{2/3}\right)^{3/2} dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^{2/3} + y^{2/3} \le a^{2/3}\}$

n) $\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dxdy$, unde D este domeniul mărginit de $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $x \ge 0$;

o) $\iint_D xdxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \le xy \le 2,\ 1 \le \frac{y}{x} \le 2,\ x > 0\}$

R. a) $\frac{16\pi}{3}$; b) $\pi(1 - \ln 2)$; c) $\frac{32\pi}{5}$; d) $\pi(e - 1)$; e) $\frac{484\pi}{5}$; f) 2π;

g) $\frac{1}{9}(32-3\pi)$; h) $2\sqrt{2}\frac{\pi}{3}$; i) 0; j) 0; k) 28π; l) $\frac{a^4}{80}$; m) $\frac{2\pi a^3}{35}$;

n) $\left(\frac{\pi}{3}-\frac{16\sqrt{2}-20}{9}\right)\cdot\frac{a^3}{2}$; o) $\frac{1}{3}\left(5\sqrt{2}-6\right)$.

Exercițiul 9.4.5. Să se calculeze aria domeniului plan D mărginit de curbele următoare:

a) $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$;

b) $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$;
c) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $(a > 0)$;
d) $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$;
e) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$.

R. a) $\frac{16\sqrt{15}}{3}$; b) $3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$; c) $\frac{3\pi a^2}{8}$; d) $\frac{5\pi a^2}{8}$; e) $\frac{a^2b^2}{2c^2}$.

Exercițiul 9.4.6. Să se calculeze masa pentru fiecare din plăcile plane, de densitate de masă $\rho(x, y)$ dată:

a) D este limitat de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$; $\rho(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2}$;

b) $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq xy \leq 2, y^2 \leq x \leq 4y^2\}$; $\rho(x, y) = \frac{x^2}{y^4}$.

R. a) $\frac{2}{3}a^2b$; b) $\frac{5}{2}$.

Exercițiul 9.4.7. Să se calculeze coordonatele centrelor de greutate ale plăcilor plane de densitate $\rho(x, y)$:
a) D este limitat de $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$; $\rho(x, y) = k$;

b) D este limitat de $y = \cos x$, $y = 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; $\rho(x, y) = 1$.

R. a) $x_G = \frac{2}{5}$, $y_G = 0$; b) $x_G = 0$; $y_G = \frac{\pi}{8}$

Exercițiul 9.4.8. Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele de coordonate pentru placa plană omogenă, mărginită de dreptele $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$
R.4

Exercițiul 9.4.9. Să se calculeze momentul de inerție al plăcii omogene limitată de cardioida $r = a(1 + \cos\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ în raport cu originea.

R. $\dfrac{35\pi a^4}{16}$

Exercițiul 9.4.10. Să se calculeze momentul de inerție față de origine al plăcii plane neomogene reprezentată prin domeniul:

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

și având densitatea în fiecare punct, $\rho(x, y) = (b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2)^{-\frac{1}{2}}$.

R. $\dfrac{\pi}{3}(a^2 + b^2)(2 - \sqrt{2})$.

Exercițiul 9.4.11. Să se calculeze următoarele integrale :

a) $\iiint_{\Omega} (xyz + x)dxdydz$, unde $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

b) $\iiint_{\Omega} x^3y^2zdxdydz$, unde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy\}$$

c) $\iiint_{\Omega} (x + y + z)dxdydz$, unde $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 2]$

d) $\iiint_{\Omega} \dfrac{xyz}{\sqrt{1 + z^2}} dxdydz$, unde $\Omega = [0, 2] \times [0, 1] \times [0, 3]$

R. a) $\dfrac{5}{8}$; b) $\dfrac{1}{110}$; c) 4; d) $\sqrt{10} - 1$

Exercițiul 9.4.12. Să se calculeze $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$, în următoarele situații:

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2z,\ 0 \leq z \leq 2\}$

b) $f(x, y, z) = x^2$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} \leq 1\}$

c) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\}$

d) $f(x, y, z) = \frac{z^3}{(y+z)(x+y+z)}$,

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0, z \geq 0,\ x + y + z \leq 1\}$

e) $f(x, y, z) = \frac{1}{(1+x+y+z)^4}$,

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0, z \geq 0,\ x + y + z \leq 1\}$

f) $f(x, y, z) = x + y + z$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

R. a) $\frac{16\pi}{3}$; b) 32π; c) 16π; d) $\frac{1}{64}$; e) $\frac{1}{48}$; f) $\frac{\pi}{6}$

Exercițiul 9.4.13. Utilizând o schimbare de variabilă adecvată, să se calculeze următoarele integrale triple:

a) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)dxdydz$, unde

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 2x \leq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1\}$

b) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$

c) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$,

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq az,\ 0 \leq z \leq h\}$

d) $\iiint_{\Omega} z^2 dxdydz$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le r^2, x^2 + y^2 + z^2 \le 2rz\}$

e) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le x\}$

f) $\iiint_{\Omega} \left[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\right] dxdydz$,

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\}$

g) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 - z^2) dxdydz$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$

R. a) $\frac{3\pi}{4}$; b) πr^4; c) $\frac{\pi a h^3}{12}(3h + 2a)$; d) $\frac{59\pi r^5}{480}$; e) $\frac{\pi}{10}$;

f) $\frac{8\pi}{5} abc\left[a^2 + b^2 + c^2\right]$; g) $\frac{4\pi R^5}{15}$.

Exerciţiul 9.4.14. Să se determine volumul părţii din cilindrul $x^2+y^2 = 2ax$ cuprinsă între paraboloidul $x^2 + y^2 = 2az$ şi planul xOy.

R. $\frac{3\pi a^3}{4}$

Exerciţiul 9.4.15. Să se calculeze volumul corpului:

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 4az, x^2 + y^2 + az \le 4a^2\}$

R. $\frac{37\pi a^3}{6}$

Exerciţiul 9.4.16. Să se determine volumul corpului mărginit de suprafeţele $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ şi $x^2 + y^2 = 2az$, $z \ge 0$.

R. $\pi a^3 \left(2\sqrt{3} - \frac{5}{3}\right)$

Exercițiul 9.4.17. Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafața

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{z}{h}\cdot e^{\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$$

R. $\dfrac{\pi abc^2}{3h}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$

Exercițiul 9.4.18. Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafețele: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 0$, $y = 0$, $y = x$.

R. $\dfrac{21\pi\sqrt{2}}{8}$

Exercițiul 9.4.19. Să se determine volumul corpului mărginit de:

a) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}$;

b) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=2$ și $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$, $z\geq 0$.

c) $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{2x}{a^2}$ și planul $x = a$.

d) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$

e) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3z$

R. a) $\dfrac{\pi^2 abc\sqrt{2}}{8}$; b) $\dfrac{4\pi abc}{3}(\sqrt{2}-1)$; c) πabc; d) $\dfrac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$; e) $\dfrac{\pi a^3}{3}$

Exercițiul 9.4.20. Să se calculeze masa corpului

$$\Omega=\left\{(x,y,z)>\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\right\}$$

ştiind că densitatea în fiecare punct este $\rho(x, y, z) = 2|z|$.
R. πabc^2

Exerciţiul 9.4.21. Să se determine masa sferei

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 3rz\}$$

ştiind că densitatea în fiecare punct este egală cu pătratul distanţei de la origine la acest punct.

R. $\frac{81}{5}\pi r^5$

Exerciţiul 9.4.22. Să se determine coordonatele centrului de greutate al corpului Ω, cu densitatea de masă $\rho(x, y, z)$, dacă:

a) $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{z^2}{c^2}, 0 \leq z \leq c\}$, $\rho(x, y, z) = 1$

b) $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2az, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2\}$, $\rho(x, y, z) = 1$

c) $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y^2 + 2z^2 \leq 4x, x \leq 2\}$, $\rho(x, y, z) = 1$

d) $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2rz\}$, $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

R. a) $x_G = y_G = 0$; $z_G = \frac{3c}{4}$; b)) $x_G = y_G = 0$; $z_G = \frac{5}{83}\left(6\sqrt{3} + 5\right)a$;

c) $x_G = \frac{4}{3}$; $y_G = z_G = 0$; d)) $x_G = y_G = 0$; $z_G = \frac{243}{512}r$.

Exerciţiul 9.4.23. Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu axa Oz a corpului material omogen, limitat de suprafeţele $x^2+y^2+z^2 =2$, $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$.

R. $\frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2} - 5)$

Exerciţiul 9.4.24. Să se determine momentele de inerţie faţă de axe şi faţă de planele de coordonate, ale elipsoidului omogen $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 \leq 1$.

R. $I_{xOy} = I_{xOz} = \frac{8}{15}\pi$, $I_{yOz} = \frac{32}{15}\pi$, $I_{Ox} = \frac{16}{15}\pi$, $I_{Oy} = I_{Oz} = \frac{8}{3}\pi$

10. INTEGRALA DE SUPRAFAŢĂ DE PRIMUL TIP

10.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale

10.1.1. Pânze şi suprafeţe netede

Definiţia 10.1.1.1. Se numeşte *pânză netedă* orice funcţie de clasă C^1, $S : D \to \mathbf{R}^3$, unde $D \subset \mathbf{R}^2$ este o mulţime deschisă şi conexă (domeniu). Pânza S se numeşte *simplă*, dacă aplicaţia S este injectivă; ea se numeşte *nesingulară*, dacă, în fiecare punct din D, matricea jacobiană a lui S are rangul doi, imaginea directă a mulţimii D prin aplicaţia S, S(D), se numeşte *imaginea pânzei S* şi o vom nota (S).

Definiţia 10.1.1.2. Două pânze S_1: $D_1 \to \mathbf{R}^3$, $S_2 : D_2 \to \mathbf{R}^3$ se numesc *echivalente* (se scrie $S_1 \sim S_2$) dacă există un difeomorfism $T: D_1 \to D_2$ astfel încât jacobianul lui T să fie strict pozitiv în fiecare punct din D_1 şi $S_1 = S_2 \circ T$. Difeomorfismul T se mai numeşte *schimbare de parametri.*

Observaţia 10.1.1.1. Folosind bijectivitatea lui T, se arată uşor că două pânze echivalente au aceeaşi imagine. De asemenea, este evident că relaţia "~" este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea pânzelor, prin urmare, ea împarte această mulţime în clase de echivalenţă.

Definiţia 10.1.1.3. Se numeşte *suprafaţă netedă* orice clasă de echivalenţă a unei pânze netede nesingulare. Prin *imaginea unei suprafeţe* înţelegem imaginea unei pânze din clasa de echivalenţă respectivă. Deseori, se foloseşte termenul suprafaţă în sensul de imagine a unei suprafeţe. Această accepţiune conduce la următoarele interpretări:

1) Dacă $S:D \to \mathbf{R}^3$ este o pânză netedă, nesingulară, care asociază fiecărui punct $(u, v) \in D$ un punct $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in (S)$ se spune că egalitățile

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D$$

sunt *ecuațiile parametrice ale suprafeței* din care face parte pânza considerată. Evident, o suprafață poate avea mai multe reprezentări parametrice.

2) Ecuația $z = \varphi(x\ y)$, $(x, y) \in D$ se numește *ecuația explicită a unei suprafețe*, și anume, a suprafeței reprezentată de pânza $S:D \to \mathbf{R}^3$, $S(u, v) = (u, v, \varphi(u, v))$.

3) Ecuația $F(x, y, z) = 0$ este *ecuația implicită a unei suprafețe* deoarece, în condițiile teoremei funcțiilor implicite , se poate determina, local, o explicitare unică $z = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in D$, care definește, evident, o pânză, $S(u, v) = (u, v, \varphi(u, v))$, $(u, v) \in D$. Imaginea acestei pânze este însă, în general, numai o parte a mulțimii $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$.

4) Sistemul: $F_1(x, y, z, u, v) = 0$, $F_2(x, y, z, u, v) = 0$, $F_3(x, y, z, u, v) = 0$ poate fi considerat o *reprezentare parametrică a unei suprafețe*, deoarece, în anumite condiții, el definește, local, pe x, y, z ca funcții de u și v.

10.1.2. Aria unei suprafețe

Considerăm o suprafață reprezentată de o pânză S netedă și simplă, definită explicit de ecuația $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, unde $D \subset \mathbf{R}^2$ este un domeniu compact măsurabil. Fie $d = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ o diviziune oarecare a domeniului D; acestei diviziuni îi corespunde o partiție $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$ a imaginii (S) a suprafeței considerate. Fie $(x, y) \in D_i$, $i = 1, 2, ..., n$ arbitrar și $M_i \in (S)$ punctul de coordonate x_i , y_i, $f(x_i, y_i)$. Considerăm planul π_i tangent la (S), în punctul M_i. Considerăm apoi cilindrul care are drept curbă directoare frontiera lui D_i și generatoarele paralele cu Oz. Acest cilindru determină pe planul tangent π_i un domeniu T_i a cărui proiecție pe planul xOy este D_i.

Aproximăm aria (S_i) prin $aria(T_i)$ și, prin urmare, aria imaginii (S) a suprafeței prin $\sum_{i=1}^{n} aria(T_i)$. Evident, aproximarea este cu atât mai bună,

cu cât diviziunea d este mai fină. Este natural, deci, să definim aria(S) ca fiind $\lim_{\|d\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} aria(T_i)$ atunci când această limită există, este finită şi nu depinde de alegerea punctelor (x_i, y_i). Acceptând această idee se poate demonstra că:

$$\text{aria(S)} = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

Dacă suprafaţa este dată parametric : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) ∈ D atunci:

$$\text{aria(S)} = \iint_D \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$$

unde $A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)}$, $C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$.

Observaţia 10.1.2.1. În cele prezentate mai sus am definit, de fapt, *aria imaginii unei pânze*. Cum imaginea unei suprafeţe este, prin definiţie, imaginea pânzei care determină suprafaţa, putem spune că am definit *aria imaginii unei suprafeţe*, dacă ţinem seama că integrala de mai sus nu depinde de pânza considerată ca reprezentant al suprafeţei date. Cum de obicei, se foloseşte termenul suprafaţă în loc de imagine a suprafeţei, putem spune că aria(S) este *aria suprafeţei* reprezentată de S.

10.1.3. Integrala de suprafaţă de primul tip

Definiţia 12.1.3.1. Fie o suprafaţă netedă reprezentată de pânza S definită parametric prin: x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) ∈ D, unde $D \subset \mathbf{R}^2$ este un domeniu compact măsurabil şi fie (S) $\subset \mathbf{R}^3$ imaginea sa. Fie Φ : (S)→**R** o funcţie arbitrară, d = {D_1, D_2, ..., D_n} o diviziune arbitrară a domeniului D, ξ un sistem de "puncte intermediare" $(u_i, v_i) \in D_i$, i = 1, 2, ..., n. Funcţiei Φ, diviziunii d şi sistemului ξ le asociem suma :

$$\sigma_{\Phi}(d,\xi)=\sum_{i=1}^{n}\Phi(x_i,y_i,z_i)\cdot aria(S_i)$$

unde $(S_i) = \{(x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u,v)), (u, v) \in D_i\}$,
$(x_i, y_i, z_i) \in (S_i)$, $x_i = x(u_i, v_i)$, $y_i = y(u_i, v_i)$, $z_i = z(u_i, v_i)$, i 0 1, 2, ..., n.

Funcția Φ se numește *integrabilă în raport cu aria* pe suprafața dată dacă există $I \in R$ încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta > 0$ astfel încât, oricare ar fi diviziunea d, cu $\|d\| < \eta$ și oricare ar fi sistemul ξ de puncte intermediare, să avem $|\sigma_{\Phi}(d,\xi) - I| < \varepsilon$. Numărul real I se numește *integrala de suprafață în raport cu aria (sau integrala de suprafață de primul tip)* a funcției Φ și se notează:

$$I=\iint_S \Phi(x,y,z)ds$$

Observația 10.1.3.1. a) Terminologia este justificată de faptul că, deși numărul real I este asociat funcției Φ și unei pânze S, se poate demonstra că, dacă se consideră o altă reprezentare parametrică a suprafeței date (adică o pânză echivalentă cu S), numărul I nu se schimbă.

b) Dacă $\Phi(x, y, z) = 1$, atunci evident I=a(S),deci $a(S)=\iint_S ds$.

Teorema 10.1.3.1. Fie o suprafață netedă și simplă reprezentată de pânza S definită parametric prin: x = x(u,v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) ∈ D unde $D \subset \mathbf{R}^2$ este un domeniu compact măsurabil. Fie $(S) \subset \mathbf{R}^3$ imaginea sa, iar $\Phi : (S) \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci Φ este integrabilă în raport cu aria pe suprafața dată și are loc egalitatea:

$$\iint_S \Phi(x,y,z)ds =$$

$$\iint_D \Phi(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}dudv$$

Observația 10.1.3.2. a) Dacă suprafața este dată explicit de ecuația z = f(x, y), (x, y) ∈ D, atunci:

$$\iint_S \Phi(x,y,z)ds =$$

$$\iint_D \Phi(x,y,f(x,y)) \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

b) Integrala de suprafață are proprietăți analoage integralelor duble: liniaritatea în raport cu funcția, aditivitatea în raport cu descompunerea imaginii suprafeței într-un număr finit de părți fără puncte interioare comune, etc. În consecință, dacă suprafața este dată implicit, printr-o ecuație care nu poate fi explicitată în raport cu nici una dintre variabile, se poate încerca descompunerea imaginii sale într-un număr finit de părți explicitabile în raport cu câte o variabilă şi apoi se adună integralele obținute.

10.1.4. Aplicații ale integralelor de suprafață de primul tip

10.1.4.1.Masa unei suprafețe materiale

Dacă imaginea $(S) \subset \mathbb{R}^3$ modelează o suprafață materială, iar $\rho : (S) \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă care asociază fiecărui punct $(x, y, z) \in (S)$ densitatea $\rho(x, y, z)$ a suprafeței materiale în acest punct, atunci masa m, este dată de :

$$m = \iint_S \rho(x,y,z)ds$$

10.1.4.2. Centrul de greutate al unei suprafețe materiale

În aceleași condiții, coordonatele centrului de greutate G al suprafeței materiale modelate de (S) sunt date de:

$$x_G = \frac{1}{m}\iint_S x\rho(x,y,z)ds\,,\ y_G = \frac{1}{m}\iint_S y\rho(x,y,z)ds\,,$$

$$z_G = \frac{1}{m} \iint_S z\rho(x,y,z)ds$$

10.1.4.3. Momentele de inerţie ale unei suprafeţe materiale

Momentele de inerţie ale suprafeţei materiale, modelată de (S), în raport cu axele de coordonate sunt:

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)ds$$

$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)ds$$

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)ds$$

Momentele de inerţie faţă de originea axelor de coordonate şi faţă de planele de coordonate se definesc analog.

10.2. Tipuri de probleme şi metode de rezolvare

Exerciţiul 10.2.1. Să se calculeze $\iint_S \Phi(x,y,z)ds$.

- Dacă S este dată parametric, se aplică formula din teorema 10.1.3.1. şi se calculează integrala dublă obţinută.
- Dacă S este dată explicit, se aplică formula din observaţiua 10.1.3.2. şi se calculează integrala dublă obţinută.
- Dacă S este dată implicit, se caută o parametrizare, după care se aplică formula din teorema 10.1.3.1., sau se încearcă o descompunere a imaginii (S) într-un număr finit de părţi fără puncte interioare comune, explicitabile în raport cu câte o variabilă, se aplică formula din observaţia 10.1.3.2. (schimbând, eventual rolul variabilelor), se calculează integralele duble obţinute şi se adună rezultatele.

Exercițiul 10.2.2. Să se determine aria suprafeței dată de....

- Dacă suprafața este dată explicit sau parametric, se aplică formula corespunzătoare din 10.1.2. şi se calculează integrala dublă obținută;
- Dacă suprafața este dată implicit, se procedează ca in exercițiul precedent.

Exercițiul 10.2.3. Să se determine masa suprafeței materiale modelate de imaginea suprafeței dată de ..., dacă densitatea în fiecare punct este $\rho(x, y, z) = ...$

- Se scrie formula 10.1.4.1. pentru calculul masei
- Se calculează integrala de suprafață rezultată, ca în exercițiul 10.2.1.

Exercițiul 10.2.4. Să se determine coordonatele centrului de greutate al suprafeței materiale modelate de imaginea suprafeței dată de ..., dacă densitatea în fiecare punct este $\rho(x, y, z) = ...$

- Se scriu formulele 10.1.4.2.
- Se calculează integralele de suprafață rezultate, ca în exercițiul 10.2.1.

Exercițiul 10.2.5. Să se determine momentele de inerție în raport cu ... ale suprafeței materiale, modelate de (S), dată de ..., dacă densitatea în fiecare punct este...

- Se scriu formulele corespunzătoare din 10.1.4.3.
- Se calculează integralele de suprafață rezultate, ca în exercițiul 10.2.1.

10.3. Exerciții rezolvate

Exercițiul 10.3.1. Să se calculeze $\iint_S z^2 dS$, unde S este dată parametric prin: $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = hu$, $u \in [0, a]$, $v \in [0, 2\pi]$.

Soluție. Deoarece S este dată parametric se aplică direct formula din teorema 10.1.3.1. Calculăm mai întâi:

$$A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sin v & u\cos v\\ h & 0\end{vmatrix}=-hu\cos v$$

$$B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}h & 0\\ \cos v & -u\sin v\end{vmatrix}=-hu\sin v$$

$$C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{vmatrix}=u\cos^2 v++u\sin^2 v=u$$

$$A^2+B^2+C^2=h^2u^2\cos^2 v+h^2u^2\sin^2 v+u^2=$$
$$=h^2u^2+u^2=(h^2+1)u^2$$

Deci $\sqrt{A^2+B^2+C^2}=u\sqrt{h^2+1}$.

Notând D = [0, a] x [0, 2π], cu formula din teorema 10.1.3.1. obținem:

$$\iint_S z^2\,dS=h^2\sqrt{h^2+1}\iint_D u^3\,du\,dv=h^2\sqrt{h^2+1}\cdot 2\pi\cdot\frac{a^4}{4}=$$

$$\frac{\pi a^4h^2\sqrt{h^2+1}}{2}$$

Exercițiul 10.3.2. Să se calculeze $\iint_S(xy+yz+zx)dS$, unde S este porțiunea suprafeței conice $z=\sqrt{x^2+y^2}$ decupată de suprafața $x^2+y^2=2ax$.

Soluție. Suprafața fiind dată explicit, aplicăm formula din observația 10.1.3.2.Notând f(x, y) = $\sqrt{x^2+y^2}$ și D$\subset\mathbf{R}^2$ discul limitat de cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 2ax$, rezultă:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2},$$

deci

$$\iint_S (xy+yz+zx)dS = \sqrt{2}\iint_D (xy + y\sqrt{x^2+y^2} + x\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

Trecând la coordonate polare, integrala devine:

$$\sqrt{2}\iint_{D^*}(r^2\sin t\cos t + r^2\sin t + r^2\cos t)rdrdt =$$

$$= \sqrt{2}\iint_{D^*} r^3(\sin t\cos t + \sin t + \cos t)drdt$$

unde $D^* = \{(r, t): 0 \le r \le 2a\cos t, -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\}$.

Prin urmare,

$$\iint_S (xy+yz+zx)dS = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[(\sin t\cos t+\sin t+\cos t)\int_0^{2a\cos t} r^3 dr\right]dt$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[(\sin t\cos t+\sin t+\cos t)\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2a\cos t}\right]dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot 16a^4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin t\cos t+\sin t+\cos t)\cos^4 t\,dt =$$

$$= 4\sqrt{2}a^4\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin t\cos^5 t\,dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin t\cos^4 t\,dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^5 t\,dt\right]$$

$$= 4\sqrt{2}a^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5 t dt = 8\sqrt{2}a^4 \int_0^{\pi/2} \cos^5 t dt =$$

$$= 8\sqrt{2}a^4 \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 t)^2 \cos t dt =$$

$$= 8\sqrt{2}a^4 \int_0^{\pi/2} (1-2\sin^2 t + \sin^4 t)(\sin t)' dt =$$

$$= 8\sqrt{2}a^4 \left(\sin t - 2 \cdot \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{\sin^5 t}{5} \right) \Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= 8\sqrt{2}a^4 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{64\sqrt{2}}{15} a^4 .$$

Exercițiul 10.3.3. Să se calculeze $\iint_S (x+y+z)dS$ unde S este emisfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

Soluție. Ecuațiile parametrice ale emisferei S sunt:

$$\begin{cases} x = 2\sin\theta\cos\varphi \\ y = 2\sin\theta\cos\varphi \\ z = 2\cos\theta \end{cases}, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi \in [0, 2\pi]$$

Calculăm :

$$A = \frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos\theta\sin\varphi & 2\sin\theta\cos\varphi \\ -2\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = 4\sin^2\theta\cos\varphi$$

$$B=\frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2\sin\theta & 0\\ 2\cos\theta\cos\varphi & -2\sin\theta\sin\varphi\end{vmatrix}=4\sin^2\theta\cos\varphi$$

$$C=\frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\cos\theta\cos\varphi & -2\sin\theta\sin\varphi\\ 2\cos\theta\sin\varphi & 2\sin\theta\cos\varphi\end{vmatrix}=$$

$$=4\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi+4\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi=4\sin\theta\cos\theta$$

$$A^2+B^2+C^2=16\sin^4\theta\cos^2\varphi+16\sin^4\theta\sin^2\varphi+16\sin^2\theta\cos^2\theta=16\sin^4\theta+$$
$$+16\sin^2\theta\cos^2\theta=16\sin^2\theta$$

Deci $\sqrt{A^2+B^2+C^2}=4\sin\theta$

Aplicând acum formula din teorema 10.1.3.1., notând $D=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2\pi]$,

obţinem :

$$\iint_S(x+y+z)dS$$

$$=\iint_D(2\sin\theta\cos\varphi+2\sin\theta\sin\varphi+2\cos\theta)\cdot 4\sin\theta d\theta d\varphi=$$

$$=8\iint_D(\sin^2\theta\cos\varphi+\sin^2\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\theta)d\theta d\varphi=$$

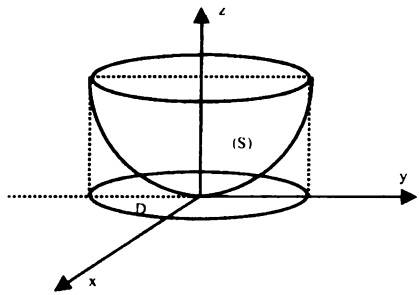
$$8\left[\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta\cdot\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi+\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta\cdot\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi+2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\right]$$

$$=8\pi$$

Exercițiul 10.3.4. Să se calculeze aria porțiunii din paraboloidul $x^2+y^2 = 3z$ mărginită de planul $z = 3$.

Soluție. Deoarece suprafața este definită explicit în raport cu variabila z, utilizăm formula:

$$a(S) = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$



Deoarece $f(x, y) = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$ şi $D = \{(x, y)\in \mathbf{R}^2: x^2 + y^2 \le 9\}$ obținem

$$a(S) = \iint_D \sqrt{1+\frac{4}{9}x^2+\frac{4}{9}y^2}\,dxdy.$$

Trecând la coordonate polare: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $r\in [0, 3]$, $t \in [0, 2\pi]$, $\frac{D(x,y)}{D(r,t)} = r$. Notând $D^* = [0, 3] \times [0, 2\pi]$, obținem:

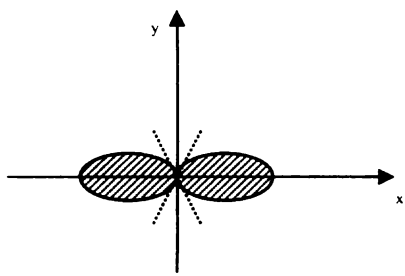
$$a(S) = \iint_{D^*} \sqrt{1+\frac{4}{9}r^2}\cdot r\,dr\,dt = 2\pi\frac{9}{8}\int_0^3\left(1+\frac{4}{9}r^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{4}{9}r^2\right)dr =$$

$$= \frac{9\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{4}{9}r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^3 = \frac{3\pi}{2}\left[\left(1+\frac{4}{9}\cdot 9\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{3\pi}{2}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

Exercițiul 10.3.5. Să se determine aria porțiunii din sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, decupată de cilindrul $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, situată în semispațiul $z \geq 0$.
Soluție. Ecuația $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ cu condiția $z \geq 0$ se poate explicita $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.
Cilindrul are generatoarele paralele cu Oz şi are directoare în planul xOy lemiscata $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, prin urmare:

$$a(S) = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,dxdy,$$

unde D este domeniul mărginit de lemniscată.



Trecând la coordonate polare şi notând

$$D^* = \left\{(r,t) : 0 \leq r \leq a\sqrt{\cos 2t}, t \in \left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]\right\},$$

obținem $a(S) = a\iint_{D^*} \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}\,drdt = 4a\int_0^{\pi/4}\left[\int_0^{a\sqrt{\cos 2t}} \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}\,dr\right]dt =$

$$= 4a \int_0^{\pi/4} (a - a\sqrt{2}\sin t)dt = 4a\left(\frac{\pi}{4}a + a\sqrt{2}\cos t\Big|_0^{\pi/4}\right) =$$

$$= 4a^2\left[\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\right] = 4a^2\left(\frac{\pi}{4} + 1 - \sqrt{2}\right) = a^2(\pi + 4 - 4\sqrt{2})$$

Exercițiul 10.3.6. Să se determine masa suprafeței materiale (S) dată prin $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $0 \le z \le 1$, dacă densitatea în fiecare punct este $\rho(x, y, z) = z$.

Soluție. Proiecția porțiunii din paraboloidul $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ corespunzătoare condiției $z \le 1$ este: $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 2\}$.

Punând $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, obținem:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,.$$

Aplicăm acum formula 10.1.4.1. obținem:

$$m(S) = \iint_S \rho(x, y, z)dS = \iint_S z dS = \frac{1}{2}\iint_D (x^2 + y^2)\sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dxdy$$

Trecând la coordonate polare, notând $D^* = [0, \sqrt{2}\,] \times [0, 2\pi]$, obținem:

$$m = \frac{1}{2}\iint_{D^*} r^2\sqrt{1 + r^2}\,rdrdt = \frac{1}{2}\iint_{D^*} r^3\sqrt{1 + r^2}\,drdt = \pi\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1 + r^2}\,dr$$

$$= \pi\int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^3(1 + r^2)}{\sqrt{1 + r^2}}dr = \pi\int_0^{\sqrt{2}} r^2(\sqrt{1 + r^2})'dr + \pi\int_0^{\sqrt{2}} r^4(\sqrt{1 + r^2})'dr =$$

$$= \pi\left[r^2\sqrt{1+r^2}\Big|_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} 2r\sqrt{1+r^2}\,dr + r^4\sqrt{1+r^2}\Big|_0^{\sqrt{2}} - \right.$$

$$\left. -4\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+r^2}\,dr \right] = \pi\left[2\sqrt{3} - \frac{2}{3}(1+r^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}} + 4\sqrt{3} - \right.$$

$$\left. -4\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+r^2}\,dr \right] = \left(4\sqrt{3} + \frac{2}{3}\right)\pi - 4\pi\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+r^2}\,dr =$$

$$= 2\pi\left(2\sqrt{3} + \frac{1}{3}\right) - 4m.$$

Rezultă $5m = \frac{2\pi}{3}(1+6\sqrt{3})$, deci $m = \frac{2\pi}{15}(1+6\sqrt{3})$.

Exercițiul 10.3.7. Să se determine coordonatele centrului de greutate al emisferei materiale S dată prin $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, știind că densitatea în fiecare punct este $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Soluție. Vom folosi formulele 10.1.4.2. Determinăm mai întâi masa emisferei $m = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2}\,dS$.

Ecuațiile parametrice ale emisferei S sunt $x = a\sin\theta\cos\varphi$, $y = a\sin\theta\sin\varphi$, $z = a\cos\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Ca în exercițiul 10.3.3. obținem $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = a^2\sin\theta$ și $m = \iint_D \sqrt{a^2\sin^2\theta}\cdot a^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi =$

$$= a^3 \iint_D \sin^2\theta d\theta d\varphi = 2\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = \pi a^3 \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} a^3$$

Determinăm acum coordonatele centrului de greutate:

$$x_G = \frac{1}{m} \iint_S x\rho(x,y,z)dS = \frac{2}{\pi^2 a^3} \iint_S x\sqrt{x^2+y^2}\, dS =$$

$$\frac{2}{\pi^2 a^3} \iint_S a^4 \sin^3\theta \cos\varphi d\theta d\varphi = \frac{2a}{\pi^2} \left(\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \right)$$

$$= 0$$

$$y_G = \frac{1}{m} \iint_S y\rho(x,y,z)dS = \frac{2}{\pi^2 a^3} \iint_S y\sqrt{x^2+y^2}\, dS =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 a^3} \iint_S a^4 \sin^3\theta \sin\varphi d\theta d\varphi = \frac{2a}{\pi^2} \left(\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \right)$$

$$= 0$$

$$z_G = \frac{1}{m} \iint_S z\rho(x,y,z)dS = \frac{2}{\pi^2 a^3} \iint_S z\sqrt{x^2+y^2}\, dS =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 a^3} \iint_S a^4 \sin^3\theta \cos\theta d\theta d\varphi = \frac{2a}{\pi^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{\sin^3\theta}{3} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4a}{3\pi}.$$

Exercițiul 10.3.8. Să se determine momentul de inerție, în raport cu planul xOy al porțiunii de suprafață $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 1$, știind că densitatea în fiecare punct este $\rho(x, y, z) = 1 + xy$.

Soluție. Momentul de inerție, în raport cu planul xOy este:

$$I_{xOy} = \iint_S z^2 \rho(x,y,z)dS = \iint_S z^2(1+xy)dS =$$

$$= \iint_D (x^2+y^2)(1+xy)\sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\iint_D (x^2+y^2)(1+xy)dxdy,$$

unde $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$

Trecând la coordonate polare, notând $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ obținem:

$$I_{xOy} = \sqrt{2}\iint_{D^*} r^2(1+r^2\sin\theta\cos\theta)\cdot rdrd\theta =$$

$$= \sqrt{2}\iint_{D^*} r^3(1+r^2\sin\theta\cos\theta)drd\theta = \sqrt{2}\iint_{D^*} r^3 drd\theta +$$

$$+\sqrt{2}\iint_{D^*} r^5\sin\theta\cos\theta drd\theta =$$

$$= \sqrt{2}\cdot 2\pi\frac{r^4}{4}\Big|_0^1 + \left(\int_0^1 r^5 dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

10.4. Exerciții propuse

Exercițiul 10.4.1. Să se calculeze:

a) $\iint_S \frac{1}{x+y+z}dS$, unde (S) este porțiunea din planul x + y+ z = a decupată de planele de coordonate;

b) $\iint_S zdS$, unde (S) este porțiunea din paraboloidul $z = \frac{x^2+y^2}{2}$, decupată de cilindrul $x^2 + y^2 = 8$;

c) $\iint_S (x^2+y^2)dS$, unde (S) este sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

d) $\iint_S (xy+z)dS$, unde (S) este porțiunea suprafeței conice $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ decupată de planul $z = 1$;

e) $\iint_S \left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{1/2} dS$,unde (S) este elipsoidul

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

R. a) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{596}{15}\pi$; c) $\frac{8}{3}\pi a^4$; d) $\frac{2}{3}\pi\sqrt{2}$;

e) $\frac{4}{3}\pi abc(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})$.

Exercițiul 10.4.2. Să se determine aria porțiunii din sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ decupată de cilindrul $x^2 + y^2 - ay = 0$, situată în semispațiul $z \geq 0$.
R.$(\pi - 2)a^2$

Exercițiul 10.4.3. Să se determine aria porțiunii de suprafață secționată de cilindrul $x^2 + y^2 = a^2$, $x > 0$, $y > 0$ din paraboloidul hiperbolic $z = xy$.

R. $\frac{\pi}{6}\left[(1+a^2)^{3/2}-1\right]$

Exercițiul 10.4.4. Să se determine aria porțiunii de suprafață secționată de cilindrul $x^2 + y^2 - 2x = 0$ din conul $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

R. $\pi\sqrt{2}$

Exercițiul 10.4.5. Să se determine aria porțiunii de suprafață secționată de cilindrul $x^2 + y^2 = a^2$ din conul $x = (y^2 + z^2)^{1/2}$.

R. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi a^2$

Exercițiul 10.4.6. Să se determine aria porțiunii conului $4(x^2 + y^2) - z^2 = 0$, cuprinsă între planele $z = 0$ și $z = 2$.

R. $\pi\sqrt{5}$

Exercițiul 10.4.7. Să se determine masa porțiunii din suprafața conului omogen $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ decupată de cilindrul $x^2 + y^2 = ax$ și să se precizeze poziția centrului de greutate al acesteia.

R. $m = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi a^2$, $x_G = \frac{a}{2}$, $y_G = 0$, $z_G = \frac{16}{9}a$

Exercițiul 10.4.8. Să se determine momentul de inerție, în raport cu axa Oz al porțiunii sferice $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ știind că densitatea în fiecare punct este $\rho(x, y, z) = z$.

R. $\frac{\pi}{8}a^5$.

Exercițiul 10.4.9. Se consideră suprafața conică omogenă

$$z = \frac{h}{a}\sqrt{x^2 + y^2}, \; x^2 + y^2 \leq a^2.$$ Se cere:

a) poziția centrului de greutate

b) momentele sale de inerție în raport cu planele de coordonate.

R. a) $x_G = y_G = 0$, $z_G = \frac{2}{3}h$; b) $I_{xOy} = \frac{1}{2}\pi h^2 a(a^2 + h^2)^{1/2}$;

$I_{yOz} = I_{zOx} = \frac{1}{4}\pi a^3(a^2 + h^2)^{1/2}$.

11. INTEGRALA CURBILINIE ÎN RAPORT CU COORDONATELE. CÂMPURI DE GRADIENȚI

11.1. Noțiuni teoretice şi rezultate fundamentale

11.1.1. Elemente de teoria câmpurilor

Definiția 11.1.1. 1. Fie $D \subset \mathbf{R}^3$ *o mulțime deschisă. O funcție* $U:D \to \mathbf{R}$ *se numeşte* ***câmp scalar.***

Dacă $U:D \to \mathbf{R}$ este un câmp scalar fixat *şi* $c \in \mathbf{R}$ *este fixat, suprafața* (S_c) *de ecuație*
$U(x, y, z) = c$, *se numeşte* ***suprafață de nivel constant*** *asociată câmpului U şi numărului c.*

Dacă $D \subset \mathbf{R}^3$ *şi* $c \in \mathbf{R}$ *este fixat, curba* (γ_c) *de ecuație implicită* $U(x, y) = c$, *se numeşte* ***curba de nivel constant*** *asociată câmpului U şi lui c.*

Definiția 11.1.1.2. *Fie A şi B două puncte oarecare din* $\mathbf{R}^3$. *Perechea ordonată (A, B) se numeşte* ***vector tangent la*** $\mathbf{R}^3$ *în punctul A (sau* ***segment orientat*** *sau* ***vector legat)*** *şi se notează* $\overrightarrow{AB}$. *Punctul A se numeşte originea sau* ***punctul de aplicație al vectorului.***

Dacă O = (0, 0, 0) este originea lui $\mathbf{R}^3$, atunci $\overrightarrow{OB}$ se numeşte **vectorul de poziție** al punctului B.

Punctul V = B - A $\in \mathbf{R}^3$ se numeşte **partea vectorială a vectorului tangent** şi în loc de $\overrightarrow{AB}$ putem nota $\overrightarrow{V_A}$ sau chiar $\overrightarrow{V}$ dacă punctul de aplicație se subînțelege.

Definiția 11.1.1.3. *Doi vectori tangenți care au aceeași parte vectorială, dar au puncte de aplicație diferite se numesc* ***paraleli.***

Definiția 11.1.1.4. *Dacă* $A \in \mathbf{R}^3$ *este fixat, mulțimea tuturor vectorilor tangenți la* $\mathbf{R}^3$ *în A se numește* ***spațiu tangent la*** $\mathbf{R}^3$ *în punctul A și se notează cu* $T_A\mathbf{R}^3$.

Spațiul tangent se organizează ca spațiu vectorial cu operațiile

$$\vec{V}_A + \vec{W}_A = \overrightarrow{(V+W)}_A \text{ și } \lambda \cdot \vec{V}_A = \overrightarrow{\lambda V}_A$$

și este izomorf cu $\mathbf{R}^3$, izomorfismul fiind dat de corespondența $V \to \vec{V}_A$.

Norma (lungimea) vectorului $\vec{V}_A$ se definește prin

$$\| \vec{V}_A \| = \| V \|$$

Produsul scalar în $T_A\mathbf{R}^3$ se definește cu ajutorul produsului scalar din $\mathbf{R}^3$ prin

$$\left\langle \vec{V}_A, \vec{W}_A \right\rangle = \langle V, W \rangle .$$

Dacă $\langle V, W \rangle = 0$, atunci $\vec{V}_A$, $\vec{W}_A$ se numesc ortogonali.

Un sistem ordonat de trei versori (vectori de normă 1) reciproc ortogonali, tangenți la $\mathbf{R}^3$ în A se numește ***reper în punctul A.***

Dacă $\{ \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3 \}$ este un reper în punctul A, atunci orice $\vec{V} \in T_A\mathbf{R}^3$ se scrie

$$\vec{V} = \left\langle \vec{V}, \vec{E}_1 \right\rangle \cdot \vec{E}_1 + \left\langle \vec{V}, \vec{E}_2 \right\rangle \cdot \vec{E}_2 + \left\langle \vec{V}, \vec{E}_3 \right\rangle \cdot \vec{E}_3$$

Numerele reale $v_i = \left\langle \vec{V}, \vec{E}_i \right\rangle$, $i = 1,2,3$ se numesc ***componentele lui*** $\vec{V}$ în raport cu reperul fixat.

Dacă notăm $\vec{i}_A = \overrightarrow{(1,0,0)}_A$, $\vec{j}_A = \overrightarrow{(0,1,0)}_A$, $\vec{k}_A = \overrightarrow{(0,0,1)}_A$ atunci reperul $\{\vec{i}_A, \vec{j}_A, \vec{k}_A\}$ se numeşte **reper natural** în punctul A, iar componentele unui vector în acest reper se numesc **componente euclidiene**.

Definiția 11.1.1.5 *O funcție* $\vec{V}$ *care asociază fiecărui punct A din* $D \subset \mathbf{R}^3$ *un vector* $\vec{V}_A = \vec{V}(A)$, *tangent la* $\mathbf{R}^3$ *în A se numeşte* ***câmp vectorial***.

Definiția 11.1.1.6. *Dacă* $\vec{V} : D \to \bigcup_{A \in D} T_A\mathbf{R}^3$ *are proprietatea că* $\vec{V}(A_1)$ *este paralel cu* $\vec{V}(A_2)$ *pentru orice* $A_1, A_2 \in D$, *atunci* $\vec{V}$ ***se numeşte câmp vectorial paralel sau constant.***

Câmpurile paralele $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ definite prin

$$\vec{i}(A) = \vec{i}_A, \quad \vec{j}(A) = \vec{j}_A, \quad \vec{k}(A) = \vec{k}_A$$

se numesc **câmpuri fundamentale**.

Se poate demonstra că, dacă $\vec{V} : D \to \bigcup_{A \in D} T_A\mathbf{R}^3$ este un câmp vectorial, atunci există trei funcții reale $V_i : D \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, 3$ astfel încât

$$\vec{V} = V_1 \cdot \vec{i} + V_2 \cdot \vec{j} + V_3 \cdot \vec{k}$$

Funcțiile scalare V_1, V_2, V_3 se numesc **componentele euclidiene** ale câmpului $\vec{V}$.

Se observă că orice câmp vectorial $\vec{V}:D\to \bigcup_{A\in D} T_A\mathbf{R}^3$ este echivalent cu o funcție vectorială

$$\vec{V}: D\to\mathbf{R}^3,\ \vec{V}(A)=(V_1(A), V_2(A), V_3(A))$$

unde $V_1, V_2, V_3:D\to\mathbf{R}$ sunt componentele euclidiene ale câmpului vectorial $\vec{V}$. Spunem că un câmp este de clasă C^k dacă componentele sale sunt de clasă C^k.

Definiția 11.1.1.7. *Fie $D\subset\mathbf{R}^3$ o mulțime deschisă și $U:D\to\mathbf{R}$ un câmp scalar de clasă C^1 pe D.*

Câmpul vectorial $\vec{V}$ definit prin

$$\vec{V}=grad\ U=\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\vec{k}$$

*se numește **câmp de gradienți** asociat câmpului scalar U.*

Priu urmare, în orice punct $A\in D$, ***gradientul câmpului scalar U*** este

$$(grad\ U)(A)=\frac{\partial U}{\partial x}(A)\cdot\vec{i}_A+\frac{\partial U}{\partial y}(A)\cdot\vec{j}_A+\frac{\partial U}{\partial z}(A)\cdot\vec{k}_A$$

Proprietățile de calcul ale gradientului rezultă direct din proprietățile derivatelor parțiale.

Definiția 11.1.1.8. Fie *$D\subset\mathbf{R}^3$ o mulțime deschisă și $\vec{V}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe D, de componente $V_1, V_2, V_3:D\to\mathbf{R}$. Se numește* ***divergența*** *câmpului vectorial $\vec{V}$ câmpul scalar*

$$div\ \vec{V}:D\to\mathbf{R},\ div\ \vec{V}=\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial V_2}{\partial y}+\frac{\partial V_3}{\partial z}$$

*Se numește **rotorul** câmpului vectorial $\vec{V}$ câmpul vectorial*

$$rot\ \vec{V} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\cdot \vec{k}$$

Această egalitate poate fi reținută ușor folosind scrierea formală

$$rot\ \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

("dezvoltând" acest determinant simbolic după prima linie)

Observația 11.1.1.1. Există o posibilitate de uniformizare a proprietăților de calcul ale gradientului, divergenței și rotorului, pentru câmpul de clasă C^1, cu ajutorul unui operator simbolic:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot \vec{k}$$

numit *operatorul lui Hamilton sau operatorul* ∇ *(nabla).*

Cele trei operații de bază din calculul vectorial (înmulțirea cu scalari, produsul scalar, produsul vectorial) aplicate "vectorului" ∇ vor conduce la cei trei operatori diferențiali definiți anterior.

Astfel, convenind să definim "produsul" lui $\frac{\partial}{\partial x}$ (respectiv, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$) cu un camp scalar φ ca fiind $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ (respectiv, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$) obținem:

- dacă U este un câmp scalar de clasă C^1, înmulțirea dintre "vectorul" ∇ și câmpul scalar U conduce la

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot \vec{k} = grad\ U$$

- dacă $\vec{V}$ este un câmp vectorial de clasă C^1 de componente V_1, V_2, V_3 produsul scalar dintre "vectorul" ∇ şi câmpul vectorial $\vec{V}$ conduce la:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = div\ \vec{V}$$

- produsul vectorial dintre "vectorul" ∇ şi câmpul vectorial $\vec{V}$ conduce la

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = rot\ \vec{V}$$

Observaţia 11.1.1.2. Când un câmp descrie un fenomen care are anumite simetrii, atunci este mai comod a se lucra în alte coordonate decât cele carteziene, deoarece gradientul, divergenţa, rotorul au expresii mai simple.

De exemplu, dacă U este de forma $U(x, y, z) = f(x^2 + y^2)$ atunci acest câmp se numeşte **câmp cu simetrie axială**, suprafeţele de nivel constant sunt, în acest caz suprafeţe cilindrice, iar studiul unui asemenea câmp se face uşor utilizând coordonatele cilindrice.

Analog, dacă $U(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2)$ atunci U este **câmp cu simetrie sferică**, suprafeţele de nivel constant sunt sfere concentrice, având centrul în origine, iar pentru studiul unui asemenea câmp sunt indicate coordonatele sferice.

Fie $D \subset \mathbf{R}^3$ o mulţime deschisă şi $T: D \to \mathbf{R}^3$ o schimbare de coordonate de componente f_1, f_2, f_3 şi fie $D^* = T(D)$.

Punctul curent din D^* are coordonatele carteziene x, y, z şi coordonatele curbilinii u, v, w astfel încât

$$\begin{cases} x = f_1(u, v, w) \\ y = f_2(u, v, w) \\ z = f_3(u, v, w) \end{cases}$$

Vectorul de poziţie al punctului curent din D^* este

$$\vec{r} = f_1(u, v, w)\,\vec{i} + f_2(u, v, w)\,\vec{j} + f_3(u, v, w)\,\vec{k}$$

Notăm cu $\vec{e}_u$, $\vec{e}_v$, $\vec{e}_w$ versorii vectorilor $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, $\vec{r}_w$ şi cu R_u, R_v, R_w normele aceloraşi vectori (parametrii lui Lamé):

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u},\ \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v},\ \vec{r}_w = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$$

$$R_u = \|\vec{r}_u\|,\ R_v = \|\vec{r}_v\|,\ R_w = \|\vec{r}_w\|$$

$$\vec{e}_u = \frac{\vec{r}_u}{R_u},\ \vec{e}_v = \frac{\vec{r}_v}{R_v},\ \vec{e}_w = \frac{\vec{r}_w}{R_w}$$

Dacă $U:D^* \to \mathbf{R}$ este un câmp de scalari exprimat în coordonate carteziene. Acest câmp poate fi exprimat şi în coordonate curbilinii considerând funcţia

$$U^* = U \circ T.$$

Teorema 11.1.1.1. a) Dacă $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w\}$ este un reper ortogonal, atunci gradientul se exprimă astfel:

$$grad\ U^* = \frac{1}{R_u} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial u} \cdot \vec{e}_u + \frac{1}{R_v} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial v} \cdot \vec{e}_v + \frac{1}{R_w} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial w} \cdot \vec{e}_w$$

b) Pentru câmpul vectorial exprimat în coordonate carteziene prin

$$\vec{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z) \cdot \vec{i} + V_2(x, y, z) \cdot \vec{j} + V_3(x, y, z) \cdot \vec{k}$$

şi în coordonate curbilinii prin

$$\vec{V}^*(u, v, w) = V_1^*(u, v, w) \cdot \vec{e}_u + V_2^*(u, v, w) \cdot \vec{e}_v + V_3^*(u, v, w) \cdot \vec{e}_w$$

rotorul şi divergenţa se exprimă astfel:

$$rot\ \vec{V}^* = \frac{1}{R_u R_v R_w} \cdot \begin{vmatrix} R_u \vec{e}_u & R_v \vec{e}_v & R_w \vec{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ R_u V_1^* & R_v V_2^* & R_w V_3^* \end{vmatrix}$$

$$div\vec{V}^* = \frac{1}{R_u R_v R_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(R_v R_w V_1^*) + \frac{\partial}{\partial v}(R_u R_w V_2^*) + \frac{\partial}{\partial w}(R_u R_v V_3^*)\right]$$

Observaţia 11.1.1.3. Punând în această ultimă formulă $V_1^* = \frac{1}{R_u} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial u}$,

$V_2^* = \frac{1}{R_v} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial v}$, $V_3^* = \frac{1}{R_w} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial w}$ care sunt componentele vectorului *grad* U^* deducem formula de calcul a laplacianului în coordonate curbilinii ortogonale:

$$\Delta f = div(grad\ U^*) = \frac{1}{R_u R_v R_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{R_v R_w}{R_u} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial u}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{R_u R_w}{R_v} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{R_u R_v}{R_w} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial w}\right)\right]$$

11.1.2. Integrala curbilinie de al doilea tip

Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ un drum. Atunci când parametrul t creşte de la a la b, punctul $\gamma(t)$ parcurge imaginea drumului γ într-un sens pe care-l numim sens direct sau pozitiv. Când t descreşte de la b la a, punctul $\gamma(t)$ parcurge imaginea drumului γ în sens invers.

Se numeşte *drum orientat* un drum pentru care s-a stabilit un sens de parcurgere a drumului.

Cum două drumuri echivalente au aceeaşi orientare, se poate vorbi despre orientarea unei curbe.

O curbă pentru care se precizează sensul de parcurgere a unui drum care îi aparține, se numește *curbă orientată*.

Definiția 11.1.2.1. Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ un drum neted și orientat, definit prin $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, $t \in [a, b]$ și $(\gamma) \subset \mathbf{R}^3$ imaginea sa.

Fie $\vec{V}$ un câmp vectorial de componente V_1, V_2, V_3 : $(\gamma) \to \mathbf{R}$.

Fie $d = (a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ și $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii d.

Considerăm suma:

$$\sigma_{\vec{V}}(\Delta, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{V} \circ \gamma \right)(\theta_i)\left(\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1} \right) = \sum_{i=1}^{n} [V_1(\gamma(\theta_i))(f(t_i) - f(t_{i-1})) +$$

$$+ V_2(\gamma(\theta_i))(g(t_i) - g(t_{i-1})) + V_3(\gamma(\theta_i))(h(t_i) - h(t_{i-1}))]$$

Câmpul vectorial $\vec{V}$ se numește *integrabil în raport cu coordonatele pe drumul* γ dacă există $I \in \mathbf{R}$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ cu proprietatea că pentru orice diviziune d cu $\|d\| < \delta$ și orice sistem θ de puncte intermediare, să avem:

$$\left| \sigma_{\vec{V}}(\Delta, \theta) - I \right| < \varepsilon$$

Numărul I se numește *integrala curbilinie în raport cu coordonatele sau integrala curbilinie de al doilea tip* a câmpului vectorial $\vec{V}$ pe drumul γ.

Se notează $I = \int_{\gamma} \vec{V}\, d\vec{r}$ (unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție

$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ al punctului curent pe (γ)) sau

$$I = \int V_1(x, y, z)dx + V_2(x, y, z)dy + V_3(x, y, z)dz$$

Observaţia 11.1.2.1. Se poate demonstra că dacă $\vec{V}$ este integrabil în raport cu coordonatele pe un drum γ, atunci el este integrabil pe orice alt drum din clasa de echivalenţă a lui γ şi valoarea integralei e aceeaşi. Aceasta justifică folosirea denumirii de integrală curbilinie.

Teorema 11.1.2.1. Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ un drum neted şi orientat definit prin $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ şi $(\gamma) \subset \mathbf{R}^3$ imaginea sa. Fie $\vec{V}$ un câmp vectorial de componente continue $V_1, V_2, V_3 : (\gamma) \to \mathbf{R}$. Atunci $\vec{V}$ este integrabil în raport cu coordonatele pe γ şi are loc egalitatea:

$$\int_{\gamma} \vec{V}\, d\vec{r} = \int_{a}^{b} [V_1(\gamma(t)) \cdot f'(t) + V_2(\gamma(t)) \cdot g'(t) + V_3(\gamma(t)) \cdot h'(t)]dt$$

Teorema 11.1.2.2. *(Proprietăţile integralei curbilinii de al doilea tip)*

a)Dacă $\vec{V}_1$ şi $\vec{V}_2$ sunt două câmpuri vectoriale integrabile în raport cu coordonatele pe drumul neted şi orientat γ, atunci pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ are loc egalitatea:

$$\int_{\gamma} \left(\alpha \vec{V}_1 + \beta \vec{V}_2 \right) d\vec{r} = \alpha \int_{\gamma} \vec{V}_1\, d\vec{r} + \beta \int_{\gamma} \vec{V}_2\, d\vec{r}$$

b) Dacă $\vec{V}$ este un câmp vectorial integrabil în raport cu coordonatele pe γ_1, γ_2, atunci $\vec{V}$ este integrabil în raport cu coordonatele pe $\gamma_1 \cup \gamma_2$ şi

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \vec{V}\, d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{V}\, d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{V}\, d\vec{r}$$

c) Dacă $\vec{V}$ este un câmp vectorial integrabil în raport cu coordonatele pe drumul neted γ, atunci $\vec{V}$ este integrabil şi pe opusul γ^* al lui γ şi

$$\int_{\gamma^-} \vec{V}\, d\vec{r} = -\int_{\gamma} \vec{V}\, d\vec{r}$$

Teorema 11.1.2.3. Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (f(t), g(t))$ un drum orientat şi $\vec{V}$ un câmp vectorial de componente $V_1, V_2 : (\gamma) \to \mathbf{R}$ continue. Atunci $\vec{V}$ este integrabil în raport cu coordonatele pe γ şi are loc egalitatea:

$$\int_{\gamma} V_1(x,y)dx + V_2(x,y)dy =$$

$$\int_a^b [V_1(f(t),g(t))\cdot f'(t) + V_2(f(t),g(t))\cdot g'(t)dt$$

Observaţia 11.1.2.2. a) Pentru a pune în evidenţă faptul că o integrală curbilinie este calculată pe o curbă simplă, închisă, parcursă în sens pozitiv (lăsând în stânga domeniul mărginit de ea) se foloseşte notaţia

$$\oint_{\gamma} V_1(x,y)dx + V_2(x,y)dy$$

b) *Lucrul mecanic* efectuat de un câmp de forţe $\vec{V}$ care acţionează asupra unui punct material deplasându-l pe imaginea drumului γ este

$$L = \int_{\gamma} \vec{V}\, d\vec{r}.$$

11.1.3. Independenţa de drum a integralelor curbilinii de al doilea tip. Caracterizarea câmpurilor de gradienţi.

Definiţia 11.1.3.1. Un camp vectorial $\vec{V}$ de clasă C^1 se numeşte *câmp potenţial* sau *câmp de gradineţi* pe mulţimea D dacă există un câmp scalar $U : D \to \mathbf{R}$ astfel încât $\vec{V} = grad\ U$, adică

$$\vec{V}(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z)\,\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z)\,\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z)\,\vec{k}$$

pentru orice $(x, y, z) \in A$.

Câmpul U se numeşte *potenţialul scalar* al câmpului vectorial $\vec{V}$.

Observaţia 11.1.3.1. Un câmp de gradienţi are o infinitate de potenţiale scalare, care diferă între ele printr-un camp constant.

Teorema 11.1.3.1. Fie $\vec{V}$ un câmp de gradienţi pe mulţimea $D \subset \mathbf{R}^3$ şi $U : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ un potenţial scalar al său. Fie $\gamma : [a, b] \to D$ un drum neted şi orientat. Atunci:

$$\int_{\gamma} \vec{V}\, d\vec{r} = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

(formula Leibnitz-Newton pentru integrala curbilinie a câmpurilor de gradienţi)

Teorema 11.1.3.2. Fie $D \subset \mathbf{R}^3$ o mulţime *deschisă şi conexă* şi $\vec{V}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe D. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\vec{V}$ este câmp de gradienţi în D;

b) pentru orice $\gamma : [a, b] \to D$ drum neted, orientat şi închis (adică $\gamma(a) = \gamma(b)$), are loc relaţia $\int_{\gamma} \vec{V}\, d\vec{r} = 0$;

c) oricare ar fi două drumuri netede şi orientate $\gamma_1 : [a, b] \to D$, $\gamma_2 : [a, b] \to D$ cu $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$ şi $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$, avem:

$$\int_{\gamma_1} \vec{V}\, d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{V}\, d\vec{r}$$

Observaţia 11.1.3.2. Un drum neted, orientat şi închis se numeşte contur, iar $\int_{\gamma} \vec{V}\, d\vec{r}$ se mai numeşte *circulaţia câmpului vectorial* $\vec{V}$ pe conturul γ.

Teorema anterioară se poate enunţa şi astfel:

Dacă $D \subset \mathbf{R}^3$ este o mulţime deschisă şi conexă şi $\vec{V}$ este un câmp vectorial de clasă C^1 pe D, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\vec{V}$ este câmp de gradienţi în D;

b) circulaţia lui $\vec{V}$ pe orice contur din D este nulă;

c) $\int_{\gamma} \vec{V}\, d\vec{r}$ este independentă de γ, depinzând numai de capetele drumului, în D.

Teorema 11.1.3.3. Fie $D \subset \mathbf{R}^3$ este o mulţime deschisă şi conexă $\vec{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z)\,\vec{i} + V_2(x, y, z)\,\vec{j} + V_3(x, y, z)\,\vec{k}$, $(x, y, z) \in D$ un câmp de gradienţi în D şi $(x_0, y_0, z_0) \in D$ fixat.

Atunci $U : D \to \mathbf{R}$ definit prin

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} V_1(t, x_0, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} V_2(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} V_1(x.y, t)dt$$

este un potenţial scalar al lui $\vec{V}$.

Observaţia 11.1.3.3. Alegând alt punct (x_0, y_0, z_0) se obţine un alt potenţial scalar al lui $\vec{V}$, care diferă de primul printr-un câmp constant.

Definiţia 11.1.3.2. Un câmp vectorial de clasă C^1 se numeşte *irotaţional* sau *conservativ* dacă *rot* $\vec{V} = \vec{O}$.

Observaţa 11.1.3.4. a) Dacă V_1, V_2 , V_3 sunt componentele lui $\vec{V}$, atunci $\vec{V}$ este conservativ dacă şi numai dacă au loc egalităţile

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}, \frac{\partial V_2}{\partial z} = \frac{\partial V_3}{\partial y}, \frac{\partial V_3}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial z}$$

b) Dacă U este camp scalar de clasă C^2, atunci *rot (grad U)* = $\vec{O}$, prin urmare, orice *câmp de gradienţi este câmp conservativ*, dar reciproca nu este în general adevărată. Spre exemplu:

$\vec{V}(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\vec{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\vec{j}$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$ este conservativ (adică $\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}$) dar nu este câmp de gradienţi (pentru că circulaţia lui $\vec{V}$ pe cercul $x^2 + y^2 = 1$ este 2π)

Teorema 11.1.3.4. Fie $D \subset \mathbf{R}^3$ o mulţime *deschisă, stelată*, iar $\vec{V}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe D. Atunci, $\vec{V}$ este câmp de gradienţi dacă şi numai dacă este câmp conservativ.

Să reamintim că $D \subset \mathbf{R}^3$ este o mulţime *stelată* dacă există $(x_0,y_0, z_0) \in S$ astfel încât oricare ar fi $(x, y, z) \in A$, segmentul de extremităţi (x_0,y_0, z_0) şi (x, y, z) (adică imaginea curbei $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{R}^3$ $\gamma(t) = ((1 - t)x_0 + tx, (1 - t)y_0 + ty, (1 - t)z_0 + tz)$) este conţinut în D.

Deoarece orice mulţime stelată este conexă, deducem::

Teorema 11.1.3.5. Dacă $D \subset \mathbf{R}^3$ este o mulţime deschisă şi stelată, iar $\vec{V}$ este un câmp vectorial de clasă C^1 în D, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\vec{V}$ este un câmp de gradienţi în D;

b) circulația lui $\vec{V}$ pe orice contur din D este nulă;

c) integrala $\int_{\gamma} \vec{V}\, d\vec{r}$ este independentă de γ pe D;

d) $\vec{V}$ este un câmp conservativ pe D;

e) sunt adevărate (în D) egalitățile:

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}, \frac{\partial V_2}{\partial z} = \frac{\partial V_3}{\partial y}, \frac{\partial V_3}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial z}$$

Observația 11.1.3.5. În multe lucrări de specialitate, noțiunea de mulțime deschisă și stelată este înlocuită cu cea similară de domeniu simplu conex, a cărei definiție (în $\mathbf{R}^3$) necesită cunoștințe de teoria suprafețelor. De aceea a fost preferată noțiunea folosită în teoremele anterioare.

Folosirea noțiunilor de "câmp de gradienți" și "câmp conservativ" în locul noțiunii de " diferențială totală exactă " este justificată prin aplicațiile directe ale teoriei câmpurilor.

Observația 11.1.3.6. Independența de drum a integralei curbilinii de speța a II-a este importantă pentru a observa în ce condiții lucrul mechanic efectuat de câmpul de forțe $\vec{F}$ (x, y, z) pentru a deplasa un punct material din $M(x_0, y_0, z_0)$ în $N(x_1, y_1, z_1)$ nu depinde de drumul parcurs, ci doar de extremitățile sale.

Cele mai importante câmpuri de forțe pentru care lucrul mecanic este independent de drum sunt:

- Forța de greutate $\vec{F} = -mg\vec{k}$;
- Forța de atracție newtoniană $\vec{F} = -\frac{k}{r^3} \cdot \vec{r}$
- Forța elastică $\vec{F} = -k^2 \vec{r}$;

(aici $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ și $r = \| \vec{r} \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$)

11.2. Tipuri de probleme şi metode de rezolvare

Ecerciţiul 11.2.1. *Să se determine gradientul unui câmp scalar dat şi apoi derivata acestui câmp după versorul gradientului.*

- Se aplică direct formulele corespunzătoare

Exerciţiul 11.2.2. Să se determine divergenţa şi rotorul uni câmp vectorial dat.

- Se aplică definiţia divergenţei şi rotorului.

Exerciţiul 11.2.3. *Să se demonstreze că un câmp vectorial dat* $\vec{V}$ *este solenoidal.*

- Se arată că *div* $\vec{V} = 0$

Exerciţiul 11.2.4. *Să se arate că* $\vec{V}$ *este irotaţional.*

- Se arată că *rot* $\vec{V} = 0$

Exerciţiul 11.2.5. *Să se exprime gradientul unui camp scalar, divergenţa şi rotorul unui câmp vectorial în coordonate sferice sau cilindrice în funcţie de simetriile câmpului.*

- În fiecare caz se determină parametrii lui Lamé şi se aplică formulele corespunzătoare.

Exerciţiul 11.2.6. Să se calculeze $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{r}$.

- Se scriu ecuaţiile parametrice ale lui γ;
- Se transformă integrala curbilinie într-o integrală definită, folosind teorema 11.1.2.1. sau teorema 11.1.2.4.
- Se calculează integrala definită.

Exercițiul 11.2.7. Să se calculeze lucrul mecanic realizat de forța $\vec{F}$ pentru a deplasa un punct material pe imaginea drumului γ.

- Se scriu ecuațiile parametrice ale lui γ
- Se scrie formula de calcul a lucrului mecanic
- Se calculează integrala curbilinie rezultată.

Exercițiul 11.2.8. Să se demonstreze că $\vec{V}(x, y)=V_1(x, y)\cdot \vec{i} + V_2(x, y)\cdot \vec{j}$ este un camp de gradienți pe mulțimea $D \subset \mathbf{R}^2$ și să se determine un potențial scalar al său.

- Dacă mulțimea D este deschisă și stelată, se verifică egalitatea

$$\frac{\partial V_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial V_2}{\partial x}(x, y), (x, y) \in D$$

- Un potențial scalar se calculează astfel:
  - se alege $(x_0, y_0) \in D$
  - se calculează $U(x, y) = \int_{x_0}^{x} V_1(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} V_2(x, t)dt$
- Dacă mulțimea A nu este stelată, se verifică definiția câmpului de gradienți, dacă se cunoaște un potențial scalar. Acesta poate fi determinat prin formula anterioară, cu o alegere convenabilă a lui (x_0, y_0).

Exercițiul 11.2.9. Să se demonstreze că

$$\vec{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z)\cdot \vec{i} + V_2(x, y, z)\cdot \vec{j} + V_3(x, y, z)\cdot \vec{k}$$

este un câmp de gradienți pe mulțimea $D \subset \mathbf{R}^3$ și să se determine un potențial scalar al său.

- Dacă mulțimea D este deschisă și stelată, se verifică (în D) egalitățile:

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}, \frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{\partial V_3}{\partial x}, \frac{\partial V_2}{\partial z} = \frac{\partial V_3}{\partial y}$$

- Un potențial scalar se calculează astfel:

- se alege $(x_0, y_0, z_0) \in D$
- se calculcază

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} V_1(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} V_2(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} V_3(x, y, t)dt$$

- Dacă A nu este stelată, se intuieşte un potenţial scalar (eventual calculând cu formula precedentă) şi se verifică definiţia.

Exerciţiul 11.2.10. Să se calculeze $\int_{\gamma} V_1(x, y)dx + V_2(x, y)dy$, unde γ este un drum neted, orientat, arbitrar, cu extremităţile în punctele (x_0, y_0) şi (x_1, y_1).

- Se arată că $\vec{V}(x, y)=V_1(x, y)\cdot \vec{i} + V_2(x, y)\cdot \vec{j}$ este câmp de gradienţi pe o mulţime deschisă şi conexă ce conţine punctele (x_0, y_0) şi (x_1, y_1).
- Se calculează un potenţial scalar U, al lui $\vec{V}$
- $$\int_{\gamma} V_1(x, y)dx + V_2(x, y)dy \overset{not}{=} \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} V_1(x, y)dx + V_2(x, y)dy$$
$$= U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0)$$

Exerciţiul 11.2.11. Să se calculeze

$$\int_{\gamma} V_1(x, y, z)dx + V_2(x, y, z)dy + V_3(x, y, z)dz$$

unde γ este un drum neted, orientat arbitrar, cu extremităţile în punctele (x_0, y_0, z_0) şi (x_1, y_1, z_1).

Observaţie. De multe ori, această integrală se notează

$$\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x_1, y_1, z_1)} V_1(x, y, z)dx + V_2(x, y, z)dy + V_3(x, y, z)dz$$

ceea ce arată că ea nu depinde de drumul parcurs ci doar de extremităţile acestuia.

- Se arată că

$\vec{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z)\cdot \vec{i} + V_2(x, y, z)\cdot \vec{j} + V_3(x, y, z)\cdot \vec{k}$

este câmp de gradienți pe o mulțime deschisă și conexă ce conține punctele (x_0, y_0, z_0) și (x_1, y_1, z_1)

- Se calculează un potențial scalar U al lui $\vec{V}$
- $\int_{\gamma} V_1(x,y,z)dx + V_2(x,y,z)dy + V_3(x,y,z)dz =$

$= U(x_1, y_1, z_1) - U(x_0, y_0, z_0).$

Exercițiul 11.2.12. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de câmpul de forțe $\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\cdot \vec{i} + F_2(x, y, z)\cdot \vec{j} + F_3(x, y, z)\cdot \vec{k}$ pentru a deplasa un punct material din $M(x_0, y_0, z_0)$ în $N(x_1, y_1, z_1)$ pe un drum arbitrar, neted pe porțiuni.

- Se arată că $\vec{F}$ este un câmp de gradienți pe o mulțime deschisă și conexă (eventual stelată) ce conține punctele M și N,
- Se determină un potențial scalar U al lui $\vec{F}$,
- Se calculează $L = \int_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x_1,y_1,z_1)} \vec{F}\cdot d\vec{r} =$

$= U(x_1, y_1, z_1) - U(x_0, y_0, z_0).$

11.3. Exerciții rezolvate

Exercițiul 11.3.1. *Fie câmpul scalar* $U(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
a) Să se determine (grad U)(1, 1, 1)
b) Să se determine $\frac{\partial U}{\partial \vec{v}}(1, 1, 1)$, *unde* $\vec{v}$ *este versorul gradientului în punctul (1, 1, 1)*

Soluţie. a) *(grad U)(1, 1, 1)* $= \dfrac{\partial U}{\partial x}(1, 1, 1) \cdot \vec{i}_A + \dfrac{\partial U}{\partial y}(1, 1, 1) \cdot \vec{j}_A +$

$\dfrac{\partial U}{\partial z}(1, 1, 1) \cdot \vec{k}_A$ unde A = (1, 1, 1) iar $\{\vec{i}_A, \vec{j}_A, \vec{k}_A\}$ este reperul natural în $T_A\mathbf{R}^3$. Rezultă *(grad U)(1, 1, 1)* $= 2(\vec{i}_A + \vec{j}_A + \vec{j}_A)$.

b) $\dfrac{\partial U}{\partial \vec{v}}(1,1,1) = \vec{v} \cdot (gradU)(1,1,1) = \dfrac{(gradU)(1,1,1)}{\| (gradU)(1,1,1) \|} \cdot (gradU)(1,1,1)$

$= \|(grad\ U)(1, 1, 1)\| = \sqrt{12}$

Exerciţiul 11.3.2. *Să se determine divergenţa şi rotorul câmpului vectorial*

$$\vec{V} = x^2yz \cdot \vec{i} + xy^2z \cdot \vec{j} + xyz^2 \cdot \vec{k}$$

Soluţie. Notând $V_1(x, y, z) = x^2yz$, $V_2(x, y, z) = xy^2z$, $V_3(x, y, z) = xyz^2$ rezultă:

$$(div\ \vec{V})(x, y, z) = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = 6xyz$$

$$(rot\ \vec{V})(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (xz^2 - xy^2) \cdot \vec{i} + (x^2z - yz^2) \cdot \vec{j} + (y^2z - x^2z) \cdot \vec{k}.$$

Exerciţiul 11.3.3. *Să se demonstreze că* $\vec{V} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$ *unde* $\vec{r}$ *este vectorul de poziţie şi* $r = \|\vec{r}\| \neq 0$, *este un câmp vectorial solenoidal.*

Soluţie. Deoarece $\vec{r} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$ rezultă

$$\vec{V} = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\cdot\vec{i} + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\cdot\vec{j} + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\cdot\vec{k}$$

Calcule directe arată că $(div\ \vec{V})(x, y, z) = 0$, deci $\vec{V}$ este solenoidal pe $\mathbf{R}^3\setminus\{(0, 0, 0)\}$.

Exerciţiul 11.3.4. *Să se demonstreze că*

$$\vec{V} = yz(2x + y + z)\cdot\vec{i} + zx(x + 2y + z)\cdot\vec{j} + xy(x + y + 2z)\cdot\vec{k}$$

este un camp vectorial irotaţional.

Soluţie. Fie $V_1(x, y, z) = yz(2x + y + z)$, $V_2(x, y, z) = zx(x + 2y + z)$ şi $V_3(x, y, z) = xy(x + y + 2z)$.

Deoarece $\frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial V_2}{\partial z}(x, y, z) = x(x + 2y + 2z)$

$$\frac{\partial V_1}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y, z) = y(2x + y + 2z)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial V_1}{\partial y}(x, y, z) = z(2x + 2y + z)$$

rezultă că $rot\ \vec{V} = \vec{0}$ în $\mathbf{R}^3$.

Exerciţiul 11.3.5. *Fie* $U(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $(x, y, z)\in \mathbf{R}^3$. *Să se exprime grad U, div grad U, rot grad U în coordonate sferice.*

Soluţie. Considerăm coordonatele sferice r, θ, φ. În acest caz

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

cu $r > 0$, $0 < 0 < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$.

Deci $\vec{r} = r\sin\theta\cos\varphi \cdot \vec{i} + r\sin\theta\sin\varphi \cdot \vec{j} + r\cos\theta \cdot \vec{k}$. Rezultă imediat

$$\begin{cases} \vec{r}_r = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\theta\sin\varphi \cdot \vec{j} + \cos\theta \cdot \vec{k} \\ \vec{r}_\theta = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi \cdot \vec{i} + r\cos\theta\sin\varphi \cdot \vec{j} - r\sin\theta \cdot \vec{k} \\ \vec{r}_\varphi = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi \cdot \vec{i} + r\sin\theta\cos\varphi \cdot \vec{j} \end{cases}$$

Parametrii lui Lamé corespunzători sunt:

$R_r = \| \vec{r}_r \| = 1$, $R_\theta = \| \vec{r}_\theta \| = r$, $R_\varphi = \| \vec{r}_\varphi \| = r\sin\theta$.

Notăm cu $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ versorii vectorilor $\vec{r}_r$, $\vec{r}_\theta$, $\vec{r}_\varphi$. Deci

$\vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\theta\sin\varphi \cdot \vec{j} + \cos\theta \cdot \vec{k}$

$\vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi \cdot \vec{i} + \cos\theta\sin\varphi \cdot \vec{j} - \sin\theta \cdot \vec{k}$

$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \cdot \vec{i} + \cos\varphi \cdot \vec{j}$

Câmpul scalar U, exprimat în coordonate sferice devine:

$$U^*(r, \theta, \varphi) = U(x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi)) = r^2$$

Evident $\dfrac{\partial U^*}{\partial r} = 2r$, $\dfrac{\partial U^*}{\partial \theta} = 0$, $\dfrac{\partial U^*}{\partial \varphi} = 0$.

Rezultă că *grad* $U^* = \frac{1}{R_r} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial r} \vec{e}_r$. Deci *grad* $U^* = 2r\vec{e}_r$.

Utilizând acum formula divergenței pentru $V^* = grad\ U^*$, obținem:

$$div\ grad\ U^* = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\theta \cdot 2r) = 6 .$$

Analog,

$$rot\ (grad\ U^*) = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} R_r \vec{e}_r & R_\theta \vec{e}_\theta & R_\varphi \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ R_r V_1^* & R_\theta V_2^* & R_\varphi V_3^* \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} R_r \vec{e}_r & R_\theta \vec{e}_\theta & R_\varphi \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ R_r \cdot 2r & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Exercițiul 11.3.6. Să se calculeze I= $\int_\gamma x dx + e^x dy$, unde γ este definită de ecuațiile parametrice $x = \ln(1+t)$, $y = \sqrt{1+t}$, $t \in [0, 1]$.

Soluție. $I = \int_\gamma x dx + e^x dy = \int_0^1 \left[\ln(1+t) \cdot \frac{1}{1+t} + e^{\ln(1+t)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+t}} \right] dt =$

$$= \int_0^1 \left[\frac{\ln(1+t)}{1+t} + \frac{\sqrt{1+t}}{2} \right] dt = \left[\frac{1}{2} \ln^2(1+t) + \frac{1}{3} \sqrt{(1+t)^3} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1) .$$

Exercițiul 11.3.7. Să se calculeze $I = \int_{\gamma} ydx - xdy + (x^2 + y^2 + z^2)dz$,

unde γ este dată de reprezentarea parametrică $x = -t\cos t + \sin t$, $y = t\sin t + \cos t$, $z = t + 1$, $t \in [0, \pi]$.

Soluție. $I = \int_{\gamma} ydx - xdy + (x^2 + y^2 + z^2)dz =$

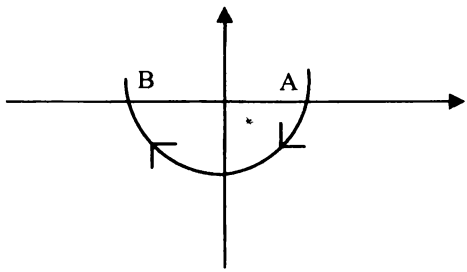
$$= \int_0^{\pi} [(t\sin t + \cos t)(t\sin t) - (-t\cos t + \sin t)(t\cos t) +$$

$$+ [(-t\cos t + \sin t)^2 + (t\sin t + \cos t)^2 + (t+1)^2]dt =$$

$$= \int_0^{\pi} (3t^2 + 2t + 2)dt = \pi^3 + \pi^2 + 2\pi.$$

Exercițiul 11.3.8. Să se calculeze $\int_{\gamma} (y+1)dx + x^2 dy$, unde (γ) este porțiunea din parabola $y = x^2 - 1$ cuprinsă între punctele A(1, 0) și B(-1, 0), având originea în A.

Soluție. Curba este dată prin ecuația sa explicită.



Ecuațiile parametrice se deduc imediat:

$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$$

Punctul A(1, 0) corespunde valorii t = 1 şi punctual B(-1, 0) corespunde valorii t = -1.

Integrala va fi:

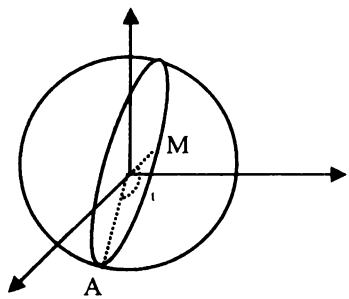
$$I = \int_{1}^{-1} [(t^2 - 1 + 1) + t^2 \cdot 2t]dt = -\int_{-1}^{1} (2t^3 + t^2)dt = -2\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}$$

Exerciţiul 11.3.9. Să se calculeze

$$\oint_{\gamma} (y - 2z)dx + (x - z)dy + (2x - y)dz$$

unde γ este dat de ecuaţiile implicite $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x - y + z = 0$ şi are originea şi capătul în $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Soluţie.



Ecuaţiile parametrice ale cercului aflat la intersecţia sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ cu planul $x - y + z = 0$ se obţin rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+z=y \\ (x+z)^2-2xz=1-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=y \\ xz=\dfrac{2y^2-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{y+\sqrt{2-3y^2}}{2} \\ z=\dfrac{y-\sqrt{2-3y^2}}{2} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x=\dfrac{y-\sqrt{2-3y^2}}{2} \\ z=\dfrac{y+\sqrt{2-3y^2}}{2} \end{cases}, y\in\left[-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$$

care reprezintă ecuația celor două semicercuri ce formează cercul γ.

Pentru calculul integralei curbilinii este utilă notația $y=\sqrt{\frac{2}{3}}\sin t$ $t\in[0,2\pi]$. Ecuațiile parametrice ale lui γ devin:

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\sin t \\ y=\dfrac{2}{\sqrt{6}}\sin t \\ z=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\sin t-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t, t\in[0,2\pi] \end{cases}$$

Integrala curbilinie este:

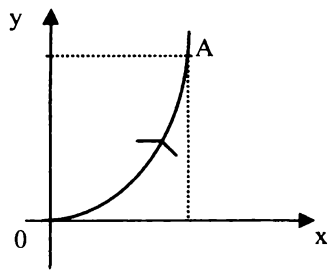
$$I=\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\sin t-\frac{2}{\sqrt{6}}\sin t+\frac{2}{\sqrt{2}}\cos t\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t+\frac{1}{\sqrt{6}}\cos t\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t+\frac{1}{\sqrt{6}}\sin t-\frac{1}{\sqrt{6}}\sin t+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\cos t\right)+$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\cos t+\frac{2}{\sqrt{6}}\sin t-\frac{2}{\sqrt{6}}\sin t\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos t+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)\Bigg]dt=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Exercițiul 11.3.10. În fiecare punct al unui plan, un punct material este acționat de forța $\vec{F}$ ale cărei proiecții pe axele de coordonate sunt $F_1(x, y) = xy$, $F_2(x, y) = x + y$. Să se determine lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$, când punctul material se deplasează din origine în A(1, 1) pe parabola $y = x^2$.

Soluție. Ecuațiile parametrice ale lui γ sunt: $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$.



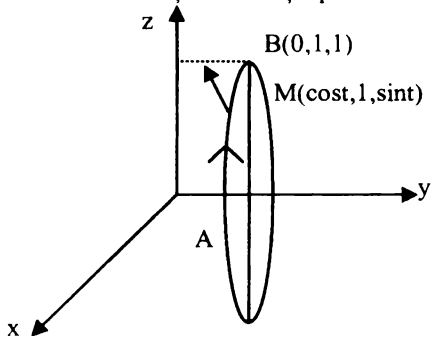
Pentru O(0, 0) obținem t = 0, iar pentru A(1, 1) obținem t = 1.

$$L=\int_{\gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\gamma}F_1(x,y)dx+F_2(x,y)dy=\int_{\gamma}xydx+(x+y)dy=$$

$$=\int_0^1[t\cdot t^2\cdot 1+(t+t^2)\cdot 2t]dt=\left(\frac{3}{4}t^4+\frac{2}{3}t^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{17}{12}.$$

Exercițiul 11.3.11. Fie $\vec{F}$ o forță variabilă având mărimea invers proporțională cu distanța de la punctul ei de aplicație la axa Oz, dirijată după perpendiculara pe această axă și îndreptată spre ea. Să se determine lucrul mecanic efectuat prin deplasarea unui punct material sub acțiunea

acestei forțe pe cercul x = cos t, y = 1, z = sin t din punctul (1, 1, 0) în punctul (0, 1, 1) în sens direct față de direcția pozitivă a axei Oy.



Din datele problemei rezultă:

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}(-x\,\vec{i} - y\,\vec{j})$$

Curba pe care se deplasează punctul are ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 \\ z = \sin t, t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Lucrul mecanic este:

$$L = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi/2} \frac{k}{\sqrt{\cos^2 t + 1}}[(-\cos t)\sin t + 1 \cdot 0]dt =$$

$$= k\sqrt{1 + \cos^2 t}\Big|_0^{\pi/2} = k(1 - \sqrt{2}).$$

Exercițiul 11.3.12. Să se demonstreze că

$$\vec{V}(x, y) = (2xy + y^2)\cdot \vec{i} + (x^2 + 2xy)\cdot \vec{j}$$

este un câmp de gradienți în $\mathbf{R}^2$ și să se determine un potențial scalar pentru acest câmp.

Soluție. $\mathbf{R}^2$ este o mulțime deschisă și stelată. Dacă $V_1(x, y) = 2xy + y^2$ și $V_2(x, y) = x^2 + 2xy$, atunci $\frac{\partial V_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial V_2}{\partial y}(x, y) = 2x + 2y$, pentru orice $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, deci $\vec{V}$ este câmp de gradienți.

Un potențial scalar al său este:

$$U(x, y) = \int_0^x V_1(t,0)dt + \int_0^y V_2(x,t)dt =$$

$$= \int_0^x 0dt + \int_0^y (x^2 + 2xt)dt = (x^2 t + xt^2)\Big|_0^y = x^2 y + xy^2$$

Exercițiul 11.3.13. Să se demonstreze că

$$\vec{V}(x, y, z) = y^2 z\cdot \vec{i} + (2xyz + 1)\cdot \vec{j} + xy^2\cdot \vec{k}$$

este un câmp de gradienți în $\mathbf{R}^3$ și să se determine un potențial scalar al său.

Soluție. Cu notațiile obișnuite obținem:

$V_1(x, y, z) = y^2 z$, $V_2(x, y, z) = 2xyz + 1$, $V_3(x, y, z) = xy^2$.

Deoarece $\mathbf{R}^3$ este mulțime deschisă și stelată și

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x} = 2yz; \quad \frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{\partial V_3}{\partial x} = y^2; \quad \frac{\partial V_2}{\partial z} = \frac{\partial V_3}{\partial y} = 2xy$$

rezultă că $\vec{V}$ e câmp de gradienți.

Un potențial scalar al său este :

$$U(x, y, z) = \int_0^x V_1(t,0,0)dt + \int_0^y V_2(x,t,0)dt + \int_0^z V_3(x,y,t)dt =$$

$$= \int_0^x 0dt + \int_0^y 1dt + \int_0^z xy^2 dt = y + xy^2 z$$

Exercițiul 11.3.14. Se consideră câmpul vectorial

$$\vec{V}(x, y, z) = \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot \vec{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot \vec{j} + 2z \cdot \vec{k}.$$

Să se demonstreze că $\vec{V}$ este conservativ pe mulțimea deschisă

$$D = \{(x, y, z), x^2 + y^2 \neq 0\}$$

și să se calculeze circulația lui $\vec{V}$ pe cercul γ: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ parcurs o dată pozitiv în raport cu semiaxa Oz.

Soluție. Avem:

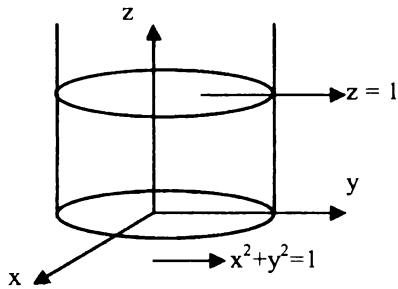
$V_1(x, y, z) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$, $V_2(x, y, z) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$, $V_3(x, y, z) = 2z$.

Deoarece $\frac{\partial V_1}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial V_2}{\partial x}(x, y, z) = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$;

$$\frac{\partial V_1}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y, z) = 0,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y, z) = 0,$$

$\forall$ $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ cu $x^2 + y^2 > 0$ rezultă că $\vec{V}$ este câmp conservativ pe domeniul său de definiție, mulțimea $D = \{(x, y, z), x^2 + y^2 \neq 0\}$.



Cercul γ este intersecția suprafeței cilindrice de ecuație $x^2 + y^2 = 1$ cu planul de ecuație $z = 1$. Ecuațiile sale parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1, t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Circulația lui $\vec{V}$ pe γ este $\oint_{\gamma} \frac{2x}{x^2+y^2}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy + 2zdz$

$$\int_0^{2\pi} [2\cos t(-\sin t) + 2\sin t\cos t + 2 \cdot 1 \cdot 0]dt = \int_0^{2\pi} 0 \cdot dt = 0.$$

Să observăm că teorema 11.1.3.5. nu poate fi aplicată deoarece mulțimea A nu este o mulțime stelată.

Exercițiul 11.3.15. Să se calculeze lucrul mechanic efectuat de forța de greutate $\vec{G}$ pentru a deplasa punctul material de masă m din poziția $A(x_1,y_1,z_1)$ în poziția $B(x_2,y_2,z_2)$.

Soluție. $\vec{G}(x, y, z) = -mg\vec{k}$ este un câmp conservativ pe $\mathbf{R}^3$, care este mulțime deschisă și stelată. Un potențial scalar al său este $U(x, y, z) = -mgz$. Lucrul mecanic este:

$$L = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} -mgdz \cdot \vec{G} \cdot d\vec{r} = -mgz \Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} = mg(z_1 - z_2)$$

Exerciţiul 11.3.16. Să se determine lucrul mecanic realizat de forţa elastică $\vec{F} = -k^2 \vec{r}$, pentru a deplasa un punct material din $A(x_1, y_1, z_1)$ în $B(x_2, y_2, z_2)$.

Soluţie. $\vec{F}(x, y, z) = -k^2x \cdot \vec{i} - k^2y \cdot \vec{j} - k^2z \cdot \vec{k}$ este un câmp de gradienţi pe $\mathbf{R}^3$ şi un potenţial scalar al său este:

$$U(x, y, z) = \int_0^x -k^2 t dt + \int_0^y -k^2 t dt + \int_0^z -k^2 t dt = -\frac{k^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Atunci $L = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{k^2}{2}\left(\left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2\right) - \left(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2\right)\right)$.

11.4. Exerciţii propuse

Exerciţiul 11.4.1. *Să se determine (grad U)(2, 1) unde*

$$U(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4},\ (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

R. $\frac{1}{3}(2\vec{i} + \vec{j})$

Exerciţiul 11.4.2. *Să se determine punctele în care norma gradientului câmpului $U(x, y) = (x^2 + y^2)^{3/2}$ este egală cu 2.*

R. $\{(x, y): x^2 + y^2 = \frac{2}{3}\}$

Exerciţiul 11.4.3. *Dacă φ şi ψ sunt funcţii reale diferenţiabile iar c este o funcţie constantă, arătaţi că:*

a) $grad(\varphi + \psi) = grad\ \varphi + grad\ \psi$

b) $grad\,(c + \varphi) = grad\,\varphi$
c) $grad(c \cdot \varphi) = c \cdot grad\,\varphi$
d) $grad(\varphi \cdot \psi) = \varphi \cdot grad\,\psi + \psi \cdot grad\,\varphi$
e) $grad(\varphi^n) = n \cdot \varphi^{n-1} \cdot grad\,\varphi,\ n \in \mathbf{N}^*$

Exercițiul 11.4.4. *Fie $z = f(u, v)$, $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$, unde g și h sunt de clasă C^1 în $D \subset \mathbf{R}^2$, iar f este de clasă C^1 în $D^* \subset \mathbf{R}^2$, D^* fiind imaginea lui D prin funcția vectorială (g, h). Să se demonstreze că:*

$$grad\ z = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \text{grad u} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \text{grad v}$$

Exercițiul 11.4.5. *Să se demonstreze că funcția $U(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ verifică egalitatea $U = 2\ln 2 - \ln(grad\ U)^2$.*

Exercițiul 11.4.6. *Să se determine derivata câmpului scalar*

$$U(x, y) = arctg\frac{y}{x}$$

în punctul $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *ce aparține cercului $x^2 + y^2 - 2x = 0$, după direcția tangentei în acest punct la cerc.*
R. 0

Exercițiul 11.4.7. *Să se determine divergența și rotorul următoarelor câmpuri vectoriale:*

a) $\vec{V}(x, y, z) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$

b) $\vec{V}(x, y, z) = (y^2 + z^2) \cdot \vec{i} + (z^2 + x^2) \cdot \vec{j} + (x^2 + y^2) \cdot \vec{k}$

c) $\vec{V}(x, y, z) = grad(x^2 + y^2 + z^2)$

R. a) $div\ \vec{V} = 3$, $rot\ \vec{V} = \vec{0}$ b) $div\ \vec{V} = 0$,

$rot\ \vec{V} = 2[(y - z) \cdot \vec{i} + (z - x) \cdot \vec{j} + (x - y) \cdot \vec{k}]$; c) $div\ \vec{V} = 6$, $rot \vec{V} = \vec{0}$.

Exercițiul 11.4.8. *Demostrați că dacă φ este un câmp scalar, $\vec{V}$ un câmp vectorial, ambele de clasă C^1, atunci*

$$div(\varphi \cdot \vec{V}) = \varphi \cdot div\ \vec{V} + \vec{V} \cdot grad\ \varphi$$

Exercițiul 11.4.9. *Demonstrați că dacă $\vec{V}$ este un câmp vectorial de clasă C^1, iar $\vec{a}$ este un câmp constant, atunci*

$$\vec{a} \cdot [grad\ (\vec{V} \cdot \vec{a}) - rot\ (\vec{V} \times \vec{a})] = div\ \vec{V}.$$

Exercițiul 11.4.10. *Demonstrați că dacă U este un câmp scalar, $\vec{V}$ un câmp vectorial, ambele de clasă C^2, atunci:*

a) $rot\ (grad\ U) = \vec{0}$

b) $div(rot\ \vec{V}) = 0$

c) $div\ (grad\ U) = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U$

Exercițiul 11.4.11. *Să se determine ΔU pentru $U(x, y, z) = \dfrac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{r}$, unde $r = \| \vec{r} \| \neq 0$, $\vec{a}$ este un vector constant, iar $\vec{r}$ este vectorul de poziție*

R. $\Delta U = -2\dfrac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{r^3}$

Exercițiul 11.4.12. *Fie $U(x, y, z)=f(x-y, x+z)$ unde f este de clasă C^1 pe* $\mathbf{R}^2$. *Să se determine ΔU.*

R. $\Delta U = 2\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)$

Exercițiul 11.4.13. *Fie*

$$\vec{V}(x, y, z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k})$$

cu $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Să se exprime div $\vec{V}$ și rot $\vec{V}$ în coordonate sferice.

R. *div* $\vec{V}=0$, *rot* $\vec{V}=\vec{0}$

Exercițiul 11.4.14. *Să se exprime ΔU în coordonate sferice și cilindrice pentru U de clasă C^2.*

R. $U^*(r, \theta, \varphi) = U(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$;

$$\Delta U = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial U^*}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U^*}{\partial\theta}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial U^*}{\partial\varphi}\right)\right].$$

$U^*(r, \theta, z) = U(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$

$$\Delta U = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U^*}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U^*}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial U^*}{\partial z}\right)\right]$$

Exercițiul 11.4.15. *Să se exprime ΔU în coordonate sferice dacă*

$$U(x, y, z) = f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

unde f este o funcție de clasă C^2 pe $(0, \infty)$

R. $U^*(r, \theta, \varphi) = f(r)$, $\Delta U = \frac{2}{r}\varphi'(r) + \varphi''(r)$.

Exercițiul 11.4.16. *Să se exprime ΔU în coordonate cilindrice dacă*

$$U(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

unde f este o funcție de clasă C^2 pe $(0, \infty)$

R. $U^*(r, \theta, z) = f(r)$, *deci* $\Delta U = \frac{1}{r}f'(r) + f''(r)$.

Exercițiul 11.4.17. *Fie $U(x_1, \ldots, x_p) = f(r)$, unde $r = \sqrt{x_1 + \ldots + x_p}$ iar f este o funcție de clasă C^2 în $(0, \infty)$. Să se calculeze*

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_p^2}$$

R. $\Delta U = f''(r) + \frac{p-1}{r}f'(r)$.

Exercițiul 11.4.18. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de al doilea tip, pe curba γ parcursă în sens direct.

a) $\int_\gamma \frac{dx}{x^2 + y^2}$; γ : x = a cos t, y = a sin t, t$\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

b) $\int_\gamma (\arcsin y)dx + x^2 dy$; γ : x = - t, y = $\sqrt{1 - t^2}$, t$\in$ [-1, 1]

c) $\int_\gamma \sqrt{yz}dx + \sqrt{zx}dy + \sqrt{xy}dz$; γ : x = t, y = t^2 , z = t^3, t$\in$ [0, 1]

d) $\int_\gamma z\sqrt{a^2 - x^2}dx + xzdy + (x^2 + y^2)dz$;

$\gamma : x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

R. a) $-\frac{1}{a}$; b) $-\pi$, c) $\frac{61}{42}$, d) $\frac{a^2 b}{2}(\pi - 1)$

Exercițiul 11.4.19. Calculați următoarele integrale curbilinii de al doilea tip.

a) $\int_{\gamma}(x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$, unde γ este arcul de parabolă $y = x^2$ ce unește punctele A(1, 1) și B(2, 4) parcurs în sens direct.

b) $\int_{\gamma}\frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$ unde γ este cercul $x^2 + y^2 = a^2$, parcurs în sensul invers acelor de ceasornic.

c) $\int_{\gamma} y^2 dx + x^2 dy$, unde γ este arcul elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ aflat deasupra axei Ox și parcurs în sensul acelor de ceasornic.

d) $\int_{\gamma}\frac{xy(ydx - xdy)}{x^2 + y^2}$, unde γ este bucla lemniscatei $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, pentru care $x \geq 0$, parcursă în sens invers acelor de ceasornic.

R. a) $\frac{1219}{30}$; b) -2π; c) $\frac{4}{3}ab^2$; d) 0

Exercițiul 11.4.20. Să se calculeze $\int_{\gamma} 2xydx - x^2 dy$ pe următoarele curbe ce au extremitatea inițială în O(0, 0) și cea finală în A(2, 1).

a) $y = \frac{1}{2}x$

b) $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$

c) linia poligonală OBA cu B(2, 0)

d) linia poligonală OCA cu C(0, 1)

R. a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{12}{5}$; c) – 4; d) 4.

Exercițiul 11.4.21. Să se calculeze $\int_{\gamma} 2xydx + x^2dy$ în aceleași ipoteze ca în exercițiul 11.4.20.

R. 4 în toate cele patru cazuri.

Exercițiul 11.4.22. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de al doilea tip:

a) $\int_{\gamma} xydx + yzdy + zxdz$, unde γ este curba de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $z = x$, $y > 0$ parcursă în sens direct;

b)i = $\int_{\gamma} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, unde γ este elipsa

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1 \end{cases}$$

, cu a, h > 0, parcursă în sens invers acelor de ceasornic dacă se privește din partea pozitivă a axei Oz.

c) $\int_{\gamma} y^2dx + z^2dy + x^2dz$, unde γ este curba lui Viviani, definită de ecuațiile: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$, $z \geq 0$, curbă parcursă în sensul acelor de ceasornic, privită din partea pozitivă a axei Ox.

R. a) $R^3\left(\frac{1}{6} + \frac{\pi\sqrt{2}}{16}\right)$;

b) Ecuațiile parametrice sunt $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $z = h(1 - \cos t)$,

$t \in [0, 2\pi]$. $I = -2\pi b(a + h)$

c) Ecuațiile parametrice ale lui γ sunt $x = a \sin^2\theta$, $y = a \sin\theta \cos\theta$, $z = a \cos\theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. $I = \frac{\pi}{4}a^3$.

Exercițiul 11.4.23. Arătați că următoarele câmpuri vectoriale sunt câmpuri de gradienți pe domeniul maxim de definiție și calculați un potențial scalar al lor.

a) $\vec{V}(x, y) = (2x + 3y)\cdot \vec{i} + (3x - 4y)\cdot \vec{j}$

b) $\vec{V}(x, y) = (3x^2 - 2xy + y^2)\cdot \vec{i} - (x^2 - 2xy + 3y^2)\cdot \vec{j}$

c) $\vec{V}(x, y) = e^{x-y}[(1 + x + y)\cdot \vec{i} + (1 - x - y)\cdot \vec{j}]$

d) $\vec{V}(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}[yz(1 + 2x^2)\cdot \vec{i} + xz(1 + 2y^2)\cdot \vec{j} + xy(1 + 2z^2)\cdot \vec{k}]$

R. a) $U(x, y) = x^2 + 3xy - 2y^2$; b) $U(x, y) = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$;

c) $U(x, y) = (x + y)e^{x-y}$; d) $U(x, y, z) = xyz\, e^{x^2+y^2+z^2}$

Exercițiul 11.4.24. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de al doilea tip pe o curbă netedă, orientată, arbitrară, pentru care se precizează doar extremitățile:

a) $\int_{(0,b)}^{(a,0)} y^2 e^x dx + 2ye^x dy$

b) $\int_{(1,4)}^{(9,1)} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}dx + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}dy$, pe o curbă din primul cadran

c) $\int_{(0,0,0)}^{(3,9,5)} x^2 dx + \sqrt{y}dy - z\sqrt{z}dz$, pe o curbă cu imaginea aflată în regiunea $y \geq 0$, $z \geq 0$.

d) $\int_{(-1,0,1)}^{(2,3,4)} e^{xyz}(yzdx + xzdy + xydz)$

R. a) $-b^2$; b) 1; c) $27 - 10\sqrt{5}$; d) $e^{24} - 1$

Exercițiul 11.4.25. Arătați că dacă $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ este o funcție derivabilă pe $[0, \infty)$ și γ este un contur neted pe porțiuni, atunci:

$$\oint_{\gamma} f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = 0$$

Indicație. Se arată că $\vec{V}(x, y) = f(x^2 + y^2) \cdot x \cdot \vec{i} + f(x^2 + y^2) \cdot y \cdot \vec{j}$ este câmp de gradienți pe $\mathbf{R}^2$.

12. INTEGRALA DE SUPRAFAŢĂ DE AL DOILEA TIP. CÂMPURI SOLENOIDALE.

12.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale

12.1.1. Suprafeţe orientabile

Considerăm o suprafaţă netedă şi simplă, reprezentată de pânza $S : D \to \mathbf{R}^3$ injectivă, de clasă C^1, cu imaginea (S). Pentru orice punct $M \in (S)$ există şi este unic un punct $(u, v) \in D$, astfel încât $M = S(u, v)$. În punctul M există doi versori normali la (S) şi anume:

$$\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\left\| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right\|} \text{ şi } - \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\left\| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right\|}$$

Definiţia 12.1.1.1. Suprafaţa (S) se numeşte *orientabilă* (sau cu două feţe) dacă funcţia care asociază fiecărui punct $M \in (S)$ unul din cei doi versori normali la (S) în punctul M este o funcţie continuă. O suprafaţă orientabilă împreună cu o alegere a unuia din cei doi versori se numeşte suprafaţă *orientată*.

Exemplul 12.1.1.1. Orice suprafaţă netedă definită explicit de ecuaţia $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ este orientabilă: dacă alegem în fiecare punct al său sensul normalei, astfel încât aceasta să facă un unghi ascuţit cu sensul pozitiv al axei Oz, spunem că suprafaţa este *orientată pozitiv* sau că alegem *faţa superioară* a suprafeţei, în caz contrar, spunem că suprafaţa este *orientată negativ* sau că alegem *faţa inferioară*.

Exemplul 12.1.1.2. Orice suprafaţă (S) netedă, simplă şi închisă este orientabilă. În acest caz există două domenii D_1, D_2 încât Fr D_1=Fr D_2 = (S), $D_1 \cup D_2 \cup (S) = \mathbf{R}^3$, D_1 mărginit, D_2 nemărginit. Dacă în fiecare punct al lui (S) alegem sensul normalei îndreptat spre domeniul D_2, obţinem *faţa exterioară* ; dacă în fiecare punct al lui (S) alegem sensul normalei îndreptat spre domeniul D_1, obţinem *faţa interioară.*

Observaţia 12.1.1.1. Dacă S : D $\rightarrow \mathbf{R}^3$ şi S_1 : D_1 $\rightarrow \mathbf{R}^3$ sunt două pânze netede, simple, nesingulare echivalente şi dacă T : D $\rightarrow$ D_1, este difeomorfism, astfel încât $S_1 \circ T = S$, cu jacobianul strict pozitiv în fiecare punct, atunci (S) şi (S_1) coincid şi au aceeaşi orientare (versorul normală este independent de reprezentarea parametrică aleasă)

12.1.2. Integrala de suprafaţă de al doilea tip

Definiţia 12.1.2.1. Considerăm o suprafaţă netedă şi orientată, definită parametric prin x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) $\in$ D, unde D $\subset \mathbf{R}^2$ este un domeniu compact măsurabil şi fie (S) $\subset \mathbf{R}^3$ imaginea sa. Fie $\vec{V}$ un câmp vectorial de componente V_1, V_2, V_3 : (S) $\rightarrow \mathbf{R}$. Fie d=$\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ o diviziune arbitrară a domeniului D. Fie ξ un sistem arbitrar de "puncte intermediare" $(u_i, v_i) \in D_i$, i = 1, 2, ...,n, $(x_i, y_i, z_i) \in (S_i)$ unde $(S_i) = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D_i\}$. Fie T_i domeniul corespunzător lui (S_i) în planul tangent la (S) în punctul (x_i, y_i, z_i), i=1, 2, ..., n şi $\vec{n}_i$, versorul normalei la suprafaţă în acest punct. Câmpului vectorial $\vec{V}$, diviziunii d şi sistemului ξ le asociem suma:

$$\sigma_{\vec{V}}(d, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{V}(x_i, y_i, z_i) \cdot \vec{n}_i \right) \cdot aria(T_i)$$

Câmpul vectorial $\vec{V}$ se numeşte *integrabil în raport cu coordonatele pe* (S), dacă există $J_2 \in \mathbf{R}$ încât pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$ astfel încât, oricare ar fi diviziunea d cu $\|d\| < \eta$ şi oricare ar fi sistemul ξ de puncte intermediare, să avem:

$$\left|\sigma_{\vec{V}}(d,\xi) - J_2\right| < \varepsilon$$

Numărul J_2 se numeşte *integrala de suprafaţă de al doilea tip* sau în *raport cu coordonatele* a câmpului vectorial $\vec{V}$ şi se notează

$$J_2 = \iint_S V_1(x,y,z)dydz + V_2(x,y,z)dzdx + V_3(x,y,z)dxdy$$

Observaţia 12.1.2.1. Dacă $\vec{V}$ este *câmpul vectorial al vitezelor* particulelor de fluid care trece printr-o suprafaţă, atunci numărul J_2 reprezintă *fluxul câmpului vectorial* $\vec{V}$ *prin suprafaţa orientată (S).*

Teorema 12.1.2.1. Considerăm o suprafaţă netedă şi orientată şi $(S) \subset \mathbf{R}^3$ imaginea sa. Dacă $\vec{V}$ este un câmp vectorial având componentele:

$V_1, V_2, V_3 : (S) \to \mathbf{R}$, continue pe (S), atunci $\vec{V}$ este integrabil în raport cu coordonatele şi are loc egalitatea:

$$\iint_S V_1(x,y,z)dydz + V_2(x,y,z)dzdx + V_3(x,y,z)dxdy = \iint_S \vec{V}\cdot\vec{n}\,dS$$

unde $\vec{n}$ este versorul orientat al normalei la (S) în punctul curent.

Observaţia 12.1.2.2. a) Dacă ţinem seama de formula de calcul a integralei de suprafaţă de primul tip şi de faptul că

$$\vec{n} = \frac{A\cdot\vec{i} + B\cdot\vec{j} + C\cdot\vec{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

obţinem regula de calcul:

$$\iint_S V_1(x,y,z)dydz + V_2(x,y,z)dzdx + V_3(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint_D \left(\tilde{V}_1\cdot A + \tilde{V}_2\cdot B + \tilde{V}_3\cdot C\right)dudv$$

unde $\tilde{V}_i(u, v) = V_i(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $i = 1, 2, 3$.

Dacă se consideră cealaltă orientare a suprafeței (S) în membrul drept apare semnul minus.

b) Dacă folosim scrierea vectorială, obținem:

$$\iint_S V_1(x,y,z)dydz + V_2(x,y,z)dzdx + V_3(x,y,z)dxdy = \iint_S \vec{V}\cdot\vec{n}\,dS$$

$$= \iint_S \vec{V}\cdot\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\left\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right\|}dS = \iint_S \frac{\left(\vec{V},\vec{r}_u,\vec{r}_v\right)}{\left\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right\|}dS = \iint_D \left(\vec{V},\vec{r}_u,\vec{r}_v\right)dudv =$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} \tilde{V}_1 & \tilde{V}_2 & \tilde{V}_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} dudv$$

c)Dacă suprafața este dată explicit de ecuația $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, unde $D \subset \mathbf{R}^2$ este un domeniu compact măsurabil, atunci versorul normalei corespunzător feței superioare este:

$$\vec{n} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

iar versorul normalei corespunzător feței inferioare este $-\vec{n}$. În practică, fixarea orientării se face în funcție de context.

d) Din teorema 12.1.2.1. rezultă că integrala de suprafață de al doilea tip, ca și cea de primul tip, este independentă de parametrizarea lui (S), în sensul

că pentru două pânze echivalente, cu aceeaşi orientare, valoarea integralei este aceeaşi şi diferă doar prin semn, dacă se schimbă orientarea.

12.1.3. Formule integrale

Formulele integrale stabilesc legături între unele tipuri de integrale considerate anterior şi pot fi folosite pentru a facilita calculul acestora.

Definiția 12.1.3.1. O mulțime $D \subset \mathbf{R}^2$ se numeşte *domeniu compact elementar* dacă satisface următoarele condiții:

a) este domeniu compact;
b) este reuniunea unui număr finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, simple în raport cu axa Ox;
c) este reuniunea unui număr finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, simple în raport cu axa Oy;
d) frontiera sa, Fr D, este reuniunea unui număr finit de imagini de curbe plane, netede, nesingulare, simple, închise şi este orientată pozitiv, adică în sensul de deplasare al unui observator pe Fr D, astfel încât să lase domeniul D în stânga.

Teorema 12.1.3.1. *(Formula Green-Riemann)*

Fie $D \subset \mathbf{R}^2$ un domeniu compact elementar şi $\vec{V}(x, y) = V_1(x, y)\cdot \vec{i} + V_2(x, y)\cdot \vec{j}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe o mulțime deschisă ce include pe D. Atunci:

$$\oint_{FrD} \vec{V}\cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dxdy .$$

Observația 12.1.3.1. Dacă $\frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial y}$, atunci $\oint_{FrD} \vec{V}\cdot d\vec{r} = 0$.

Teorema 12.1.3.2. Dacă $D \subset \mathbf{R}^2$ este domeniu compact elementar, atunci :

$$\text{aria}(D) = \frac{1}{2}\oint_{FrD} xdy - ydx = \int_{FrD} xdy = \int_{FrD} -ydx$$

Formula Gauss-Ostrogradski este analogul tridimensional al formulei Green-Riemann şi stabileşte o legătură între integrala de suprafaţă şi integrala triplă.

Definiţia 12.1.3.2. Pânza $p : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbf{R}^3$ se numeşte *închisă* dacă $p(u, 0) = p(u, 1)$ şi $p(0, v) = p(1, v)$, oricare ar fi $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Pânza $p : D \to \mathbf{R}^3$, cu $D \subset \mathbf{R}^2$ domeniu compact, se numeşte *închisă* dacă există o bijecţie continuă şi cu inversa continuă $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \to D$, astfel încât pânza $p \circ \varphi : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbf{R}^3$ să fie închisă, în sensul de mai sus.

Se numeşte *suprafaţă închisă* o suprafaţă reprezentată de o pânză închisă.

Definiţia 12.1.3.3. O mulţime $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ este *domeniu compact elementar* dacă:

a) este domeniu compact;
b) este reuniunea unui număr finit de domenii compacte simple în raport cu axa Ox, fără puncte interioare comune;
c) este reuniunea unui număr finit de domenii compacte simple în raport cu axa Oy, fără puncte interioare comune;
d) este reuniunea unui număr finit de domenii compacte simple în raport cu axa Oz, fără puncte interioare comune;
e) frontiera sa, Fr Ω este reuniunea unui număr finit de imagini de suprafeţe închise şi orientate.

Exemple. Sunt elementare următoarele domenii:

- sfera : $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \le r^2\}$
- coroana sferică: $\{r_1^2 \le (x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \le r_2^2\}$
- cilindrul: $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \le r^2, 0 \le z \le h\}$
- elipsoidul: $\left\{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\right\}$

Observaţia 12.1.3.1. Dacă $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ este un domeniu compact elementar, atunci se poate defini în mod natural versorul normală exterioară în punctul curent din Fr Ω.

Teorema 12.1.3.3. *(Formula lui Gauss-Ostrogradski)*
Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un domeniu compact elementar şi $\vec{V}(x, y, z) = V_1(x, y.z)\cdot \vec{i} + V_2(x, y, z)\cdot \vec{j} + V_3(x, y, z)\cdot \vec{k}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe o mulţime deschisă ce include pe Ω. Atunci fluxul câmpului vectorial $\vec{V}$ prin Fr Ω, după normala exterioară $\vec{n}$ este egal cu integrala divergenţei lui $\vec{V}$ pe Ω, adică:

$$\iint_{Fr\Omega} V_1(x,y,z)dydz + V_2(x,y,z)dzdx + V_3(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial V_3}{\partial z}(x,y,z)\right)dxdydz .$$

Observaţia 12.1.3.2. Formula Gauss-Ostrogradski

$$\iint_{Fr\Omega}\left(\vec{V}\cdot\vec{n}\right)ds = \iiint_{\Omega}\left(div\,\vec{V}\right)dxdydz$$

se mai numeşte şi formula flux-divergenţă, pentru că permite o interpretare fizică a divergenţei unui câmp cu ajutorul fluxului printr-o suprafaţă închisă.

Corolarul 12.1.3.1. Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un domeniu compact elementar şi U un câmp scalar de clasă C^1 pe o mulţime deschisă care îl conţine pe Ω. Atunci:

$$\iiint_{\Omega}(gradU)dxdydz = \iint_{Fr\Omega}\vec{n}\cdot U ds$$ (formula integrală a gradientului)

Corolarul 12.1.3.2. Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un domeniu compact elementar şi $\vec{V}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe o mulţime deschisă care îl conţine pe Ω. Atunci:

$$\iiint_{\Omega} rot\,\vec{V}\,dxdydz = \iint_{Fr\Omega}\left(\vec{n}\times\vec{V}\right)ds$$ (formula integrală a rotorului)

Corolarul 12.1.3.3. Fie $G \subset \mathbf{R}^3$ o mulțime deschisă și $(x_0, y_0, z_0) \in G$ arbitrar. Fie $\vec{V} : G \to \mathbf{R}^3$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe G și $U : G \to \mathbf{R}$ un câmp scalar de clasă C^1 pe G.

Fie $(\Omega_n)_{n\in \mathbf{N}}$ un șir de domenii compacte elementare incluse în G, astfel încât $\lim_{n\to\infty} d(\Omega_n) = 0$ și $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega_n$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$. Atunci:

a) $(\text{div}\ \vec{V})(x_0, y_0, z_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\text{vol}\Omega_n} \iint_{Fr\Omega_n} \vec{n}\cdot\vec{V}\,ds$

b) $(\text{rot}\ \vec{V})(x_0, y_0, z_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\text{vol}\Omega_n} \iint_{Fr\Omega_n} \vec{n}\times\vec{V}\,ds$

c) $(\text{grad}\ U)(x_0, y_0, z_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\text{vol}\Omega_n} \iint_{Fr\Omega_n} \vec{n}\cdot U ds$

Observația 12.1.3.3. Formulele din corolarul 12.1.3.3. arată că divergența și rotorul unui câmp vectorial, precum și gradientul unui câmp scalar, care au fost definite inițial folosind axele de coordonate, nu depind de alegerea acestor axe, ci depind de câmp și de punctul în care se calculează.

Definiția 12.1.3.4. Fie $G \subset \mathbf{R}^2$ o mulțime deschisă, $f : G \to \mathbf{R}$ o funcție de clasă C^1 și S suprafața definită explicit de ecuația $z = f(x, y)$, orientată pozitiv.

Fie $D \subset G$ domeniu compact elementar,
$(S) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ și
$(C) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in Fr\ D\}$, cu orientarea indusă de pe Fr D. Atunci (C) este imaginea unei curbe orientate în $\mathbf{R}^3$ și se numește *bordura orientată* a lui (S).

Observaţia 12.1.3.4. Orientarea curbei (C), indusă de orientarea de pe Fr D se numeşte orientare compatibilă cu orientarea suprafeţei (S).

Orientarea fixată pe bordura (C), compatibilă cu cea a suprafeţei (S) poate fi reprezentată intuitiv astfel: dacă $\vec{\xi}$ este vectorul tangent la curbă în punctul curent şi $\vec{n}$ este vectorul normal la suprafaţă în acelaşi punct, atunci un observator care se deplasează pe (C) în sensul lui $\vec{\xi}$, având capul spre $\vec{n}$, lasă în stânga suprafaţa (S).

Definiţia 12.1.3.5. Fie (S) $\subset \mathbf{R}^3$ imaginea unei suprafeţe date. Dacă (S) este de clasă C^2, orientată, şi se poate descompune într-un număr finit de porţiuni de suprafaţă care pot fi reprezentate prin ecuaţii explicite în raport cu fiecare variabilă, atunci (S) se numeşte *suprafaţă elementară*. În acest caz, *bordura elementară* (C) a lui (S) este imaginea drumului închis obţinut prin juxtapunerea drumurilor care au ca imagine arce de curbă incluse numai în una din bordurile porţiunilor componente.

Teorema 12.1.3.4. *(Formula lui Stokes)*

Fie (S) $\subset \mathbf{R}^3$ o suprafaţă elementară şi (C) bordura sa orientată. Fie $\vec{V}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe o mulţime deschisă din $\mathbf{R}^3$ care conţine pe (S). Atunci circulaţia lui $\vec{V}$ pe (C) este egală cu fluxul rotorului lui $\vec{V}$ prin (S), adică:

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_S (rot\,\vec{V}) \cdot \vec{n}\, ds$$

Observaţia 12.1.3.5. Din formula lui Stokes rezultă că fluxul rotorului unui câmp vectorial prin două suprafeţe care au aceeaşi bordură este acelaşi.

12.1.4. Caracterizarea câmpurilor solenoidale

Definiția 12.1.4.1. Fie $D \subset \mathbf{R}^3$ o mulțime deschisă. Câmpul vectorial $\vec{V}$, de clasă C^1 pe D, se numește *solenoidal (fără surse) în D*, dacă div $\vec{V} = 0$ în D. $\vec{V}$ se numește *câmp de rotori (câmp de vârtejuri, câmp rotațional)* în D, dacă există un câmp vectorial $\vec{W}$, de clasă C^2 în D, încât $\vec{V}$ = rot $\vec{W}$ în D. În acest caz, $\vec{W}$ se numește *potențialul vector al câmpului* $\vec{V}$.

Observația 12.1.4.1. Dacă $\vec{V}$ este un câmp de rotori, atunci div $\vec{V}$ = div(rot $\vec{W}$) = 0, deci $\vec{V}$ este solenoidal. Din formula Gauss-Ostrogradski rezultă că, dacă $\vec{V}$ este solenoidal în D, atunci fluxul lui $\vec{V}$ prin frontiera închisă a oricărui domeniu compact elementar inclus în D este nul, justificând denumirea de "câmpuri fără surse" pentru câmpurile solenoidale.

În teorema următoare se dă o caracterizare completă a câmpurilor solenoidale.

Teorema 12.1.4.1. Fie $D \subset \mathbf{R}^3$ o mulțime deschisă și $\vec{V}$ un câmp vectorial de clasă C^1 în D. Următoarele afirmații sunt *echivalente*:

(a) $\vec{V}$ este câmp solenoidal în D

(b) $\vec{V}$ este, local, un câmp de rotori (adică, pentru orice $a \in D$, există $r > 0$ și un câmp vectorial $\vec{W}$, de clasă C^2 în sfera $S(a, r) \subset D$, încât $\vec{V}$ = rot $\vec{W}$ în S(a, r))

(c) fluxul lui $\vec{V}$ prin frontiera închisă a oricărui domeniu compact elementar inclus în D este nul.

Observația 12.1.4.2. Pentru a determina un potențial vector $\vec{W}$, al câmpului $\vec{V}$ se procedează astfel: se consideră $\vec{W}$ de forma:

$\vec{W}(x, y, z)=W_1(x, y, z)\cdot \vec{i} + W_2(x, y, z)\cdot \vec{j}$, $(x, y, z) \in S(a, r), a=(x_0, y_0, z_0)$

Din condiția rot $\vec{W} = \vec{V}$ se obține:

$$\frac{\partial W_1}{\partial z} = V_2, \frac{\partial W_2}{\partial z} = -V_1, \frac{\partial W_2}{\partial x} - \frac{\partial W_1}{\partial y} = V_3$$

unde V_1, V_2, V_3 sunt componentele lui $\vec{V}$.

Din primele două egalități rezultă că, pentru orice $(x, y, z) \in S(a, r)$ avem:

$$W_1(x, y, z) = \int_{z_0}^{z} V_2(x, y, t)dt + \varphi_1(x, y)$$

$$W_2(x, y, z) = -\int_{z_0}^{z} V_1(x, y, t)dt + \varphi_2(x, y)$$

unde φ_1, φ_2 sunt funcții de clasă C^2.

Ținând seama că div $\vec{V} = 0$, ultima egalitate devine:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = V_3(x, y, z_0)$$

Este evident că există funcții φ_1, φ_2, satisfăcând această egalitate. Cunoașterea unui potențial vector, particular este suficientă pentru găsirea oricărui alt potențial vector, dacă mulțimea D este *deschisă și stelată*. În cest caz două câmpuri vectoriale $\vec{W}_1$ și $\vec{W}_2$ cu proprietatea că rot $\vec{W}_1 = \vec{V}$ și rot $\vec{W}_2 = \vec{V}$ diferă printr-un câmp de gradienți.

Observația 12.1.4.3. În condițiile formulei lui Stokes, fluxul unui câmp solenoidal $\vec{V}$ poate fi exprimat prin circulația unui potențial vector $\vec{W}$ al lui $\vec{V}$ și anume:

$$\iint_S \vec{V}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_S (rot\,\vec{W})\cdot\vec{n}\,dS = \int_C \vec{W}\cdot d\vec{r}$$

unde (C) este bordura orientată a lui (S).

12.2. Tipuri de probleme și metode de rezolvare

Exercițiul 12.2.1. Să se calculeze $\iint_S V_1 dydz + V_2 dzdx + V_3 dxdy$, unde (S) este o suprafață netedă, *orientată* dată, iar V_1, V_2 ,V_3 : S→**R** sunt funcții continue date.

- Se determină versorul $\vec{n}$ al normalei la (S) în punctul curent;
- Se aplică formula din teorema 12.1.2.1., reducându-se problema la calculul unei integrale de suprafață de primul tip;
- Dacă suprafața este dată parametric, se poate utiliza direct una dintre formulele echivalente prezentate în observația 12.1.2.2. a), b)

Exercițiul 12.2.2. Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $\vec{V}$ prin suprafața orientată (S).

- Ținând cont de observația 12.1.2.1., exercițiul se reduce la tipul precedent.

Exercițiul 12.2.3. Să se calculeze, folosind formula Green-Riemann

$$\oint_{FrD} V_1(x,y)dx + V_2(x,y)dy$$

- Se arată că D este domeniu compact elementar,

- Se calculează $\frac{\partial V_1}{\partial y}$ şi $\frac{\partial V_2}{\partial x}$ şi se aplică formula

$$\oint_{FrD} V_1(x,y)dx + V_2(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) dxdy$$

- Se calculează integrala dublă rezultată.

Exerciţiul 12.2.4. Să se calculeze aria domeniului D.

- Se arată că D este domeniu compact elementar;
- Se foloseşte una din formulele

$$\text{aria(D)} = \frac{1}{2}\left(\oint_{FrD} xdy - ydx \right) = \oint_{FrD} xdy = \oint_{FrD} -ydx ;$$

- Se calculează integrala curbilinie rezultată.

Exerciţiul 12.2.5. Folosind formula Gauss-Ostrogradski, să se calculeze

$$\iint_{Fr\Omega} V_1(x,y,z)dydz + V_2(x,y,z)dzdx + V_3(x,y,z)dxdy$$

- Se arată că Ω este un domeniu compact elementar;
- Se calculează $\frac{\partial V_1}{\partial x}$, $\frac{\partial V_2}{\partial y}$, $\frac{\partial V_3}{\partial z}$ şi se aplică formula

$$\iint_{Fr\Omega} V_1(x,y,z)dydz + V_2(x,y,z)dzdx + V_3(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial V_3}{\partial z}(x,y,z) \right) dxdydz$$

- Se calculează integrala triplă rezultată.

Exerciţiul 12.2.6. Să se calculeze, folosind formula lui Stokes:

$$\oint_C V_1(x,y,z)dx + V_2(x,y,z)dy + V_3(x,y,z)dz$$

- Se identifică o suprafaţă a cărei bordură orientată să fie (C);

- Se aplică formula lui Stokes;
- Se calculează integrala de suprafaţă rezultată.

Exerciţiul 12.2.7. Să se demonstreze că $\vec{V}$ este solenoidal în D.

- Se arată că div $\vec{V}$ = 0 în D.

(reamintim că div $\vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$, unde V_1, V_2, V_3 sunt componentele câmpului vectorial $\vec{V}$; dacă $\vec{V}$ este exprimat în reperul ortogonal $\{ \vec{e}_u , \vec{e}_v , \vec{e}_w \}$ prin: $\vec{V}^*(u, v, w) = V_1^*(u, v, w) \cdot \vec{e}_u +$ $+V_2^*(u, v, w) \cdot \vec{e}_v + V_3^*(u, v, w) \cdot \vec{e}_w$, atunci:

$$\operatorname{div} \vec{V}^* = \frac{1}{R_u R_v R_w} \left[\frac{\partial}{\partial u}(R_v R_w V_1^*) + \frac{\partial}{\partial v}(R_u R_w R_2^*) + \frac{\partial}{\partial w}(R_u R_v V_3^*) \right]$$

R_u, R_v, R_w fiind parametrii lui Lamé)

Exerciţiul 12.2.8. Să se demonstreze că fluxul câmpului vectorial $\vec{V}$ prin frontiera închisă a unui domeniu compact elementar dat este nul.

- Se arată că $\vec{V}$ este solenoidal pe o mulţime deschisă ce conţine domeniul respectiv

Exerciţiul 12.2.9. Să se demonstreze că $\vec{V}$ este, local, un câmp de rotori şi să se determine un potenţial vector pentru $\vec{V}$.

- Se arată că $\vec{V}$ este solenoidal într-o mulţime deschisă D;
- Se fixează un punct a = $(x_0, y_0, z_0) \in$ D şi se calculează:

$$W_1(x, y, z) = \int_{z_0}^{z} V_2(x, y, t)dt + \varphi_1(x, y)$$

$$W_2(x, y, z) = -\int_{z_0}^{z} V_1(x, y, t)dt + \varphi_2(x, y),$$

unde φ_1, φ_2 se aleg astfel ca:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = V_3(x, y, z_0)$$

unde V_1, V_2, V_3 sunt componentele câmpului $\vec{V}$.

- Câmpul vectorial $\vec{W} = W_1 \cdot \vec{i} + W_2 \cdot \vec{j}$ este un potențial vector pentru $\vec{V}$ în sfera $S(a, r) \subset D$
- Orice alt potențial vector al lui $\vec{V}$ în S(a, r) este de forma $\vec{W}$ + grad U, unde U este un câmp scalar de clasă C^2 în S (a, r).

Exercițiul 12.2.10. Să se determine fluxul unui câmp solenoidal $\vec{V}$ printr-o suprafață orientată dat.

- Se calculează direct $\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n}\, dS$

Sau

- Se verifică egalitatea div $\vec{V} = 0$ într-o mulțime deschisă D ce conține (S)
- Se determină un potențial vector $\vec{W}$ pentru $\vec{V}$ într-o sferă ce conține (S)

- Se calculează $\int_C \vec{W} \cdot d\vec{r}$, unde (C) este bordura orientată a lui (S)
- Din observația 12.1.4.3. se deduce $\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n}\, dS = \int_C \vec{W} \cdot d\vec{r}$.

12.3. Exerciții rezolvate

Exercițiul 12.3.1. Să se calculeze $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, (S) fiind fața exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Soluție. Avem: $x = 2 \sin\theta \cos\varphi$, $y = 2 \sin\theta \sin\varphi$, $z = 2 \cos\theta$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $A = 4 \sin^2\theta \cos\varphi$, $B = 4 \sin^2\theta \sin\varphi$, $C = 4\sin\theta\cos\theta$.

Notând $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ și aplicând formula din observația 12.1.2.2. obținem:

$$\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint_D (2\sin\theta\cos\varphi \cdot 4\sin^2\theta\cos\varphi +$$

$$+ 2\sin\theta\sin\varphi \cdot 4\sin^2\theta\sin\varphi + 2\cos\theta \cdot 4\sin\theta\cos\theta) d\theta d\varphi =$$

$$= 8 \iint_D (\sin^3\theta\cos^2\varphi + \sin^3\theta\sin^2\varphi + \sin\theta\cos^2\theta) d\theta d\varphi =$$

$$= 8 \iint_D (\sin^3\theta + \sin\theta\cos^2\theta) d\theta d\varphi = 8 \iint_D \sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= 8 \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 8 \cdot 2\pi \cdot 2 = 32\pi$$

Exercițiul 12.3.2. Să se calculeze

$$\iint_S xzdydz + yzdzdx + (x^2 + y^2)dxdy$$

pe fața superioară a suprafeței (S) definită prin $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

Soluție. Ținând seama de observația 12.1.2.2. c) rezultă că

$$\vec{n} = \frac{-2x \cdot \vec{i} - 2y \cdot \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$

Cu formula din teorema 12.1.2.1. reducem problema la calculul unei integrale de suprafață de primul tip:

$$I = \iint_S xzdydz + yzdzdx + (x^2+y^2)dxdy =$$

$$= \iint_S \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}[-2x^2z - 2y^2z + (x^2+y^2)]dS$$

Notând D = {(x, y): $x^2 + y^2 \leq 1$} obținem integrala:

$$I = \iint_D [(-2x^2-2y^2)(x^2+y^2) + (x^2+y^2)]dxdy =$$

$$= \iint_D (x^2+y^2)(1-2x^2-2y^2)dxdy$$

Trecând la coordonate polare, notând $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$, obținem

$$I = \iint_{D^*} r^2(1-2r^2)rdrdt = \iint_{D^*} (r^3-2r^5)drdt =$$

$$= 2\pi \int_0^1 (r^3-2r^5)dr = 2\pi\left(\frac{r^4}{4} - 2\cdot\frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

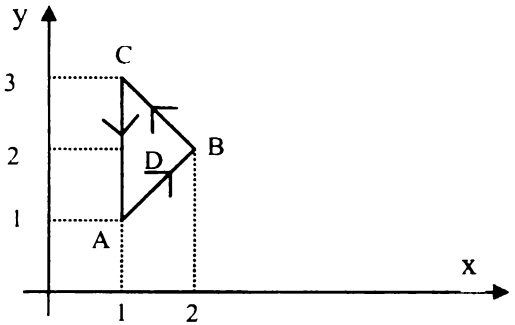
Exercițiul 12.3.3. Calculați direct și folosind formula lui Green-Riemann $\oint_\gamma 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy$, unde γ este triunghiul cu vârfurile A(1,1), B(2,2), C(1,3), parcurs o dată în sens pozitiv.

Soluție. γ este reuniunea segmentelor AB, BC, CA, unde:

AB: $y = x$, $x \in [1, 2]$

CB: $y = 4 - x$, $x \in [1, 2]$

AC: x = 1, y ∈ [1, 3]



Atunci

$$\oint_{\gamma} 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy = \int_{AB} 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy +$$

$$+ \int_{BC} 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy + \int_{CA} 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy =$$

$$\int_1^2 [2(x^2+x^2)+(x+x)^2]dx + \int_2^1 [2(x^2+(4-x)^2)+(x+4-x)^2\cdot(-1)]dx$$

$$+ \int_3^1 [2(1+y^2)\cdot 0+(1+y)^2\cdot 1]dy = \int_1^2 8x^2dx + \int_2^1 (4x^2-16x+16)dx$$

$$+ \int_3^1 (y^2+2y+1)dy = \int_1^2 (4x^2+16x-16)dx + \left(\frac{y^3}{3}+y^2+y\right)\Bigg|_3^1 =$$

$$= \left(\frac{4x^3}{3}+\frac{16x^2}{2}-16x\right)\Bigg|_1^2 + \left(\frac{y^3}{3}+y^2+y\right)\Bigg|_3^1 = -\frac{4}{3}$$

Aplicând acum formula Green-Riemann obținem:

$$\oint_{\gamma} 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy =$$

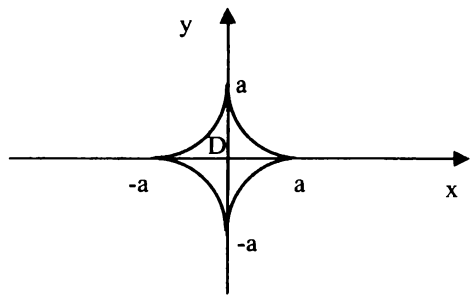
$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}((x+y)^2)-\frac{\partial}{\partial y}(2(x^2+y^2))\right]dxdy =$$

$$-\iint_D [2(x+y)-4y]dxdy = 2\iint_D (x-y)dxdy = 2\int_1^2\left[\int_x^{4-x}(x-y)dy\right]dx$$

$$= 2\int_1^2\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^{4-x}dx = 2\int_1^2(8x-2x^2-8)dx = -\frac{4}{3}$$

Exercițiul 12.3.4. Folosind integrala curbilinie de speța a II-a, să se calculeze aria figurii limitată de curba de ecuație $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$, a > 0.

Soluție.



Curba de ecuație $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$ (astroida) are ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \; t\in[0,2\pi].$$

Aria sa este $A = \frac{1}{2}\int_{FrD} xdy - ydx =$

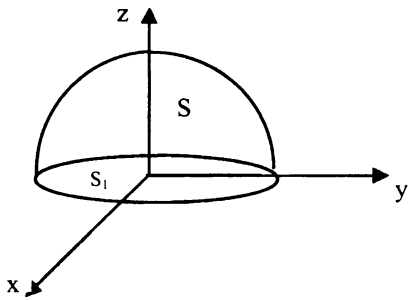
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[a\cos^3 t\cdot\left(3a\sin^2 t\cos t\right)-a\sin^3 t\cdot(-3a\cos^2 t\sin t)\right]dt$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\cdot(\sin^2 t+\cos^2 t)dt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt$$

$$= \frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt = \frac{3a^2}{16}\cdot 2\pi = \frac{3a^2\pi}{8}$$

Exercițiul 12.3.5. Să se calculeze $\iint_S x^3dydz + y^3dzdx + x^3dxdy$ pe fața exterioară a semisferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.

Soluție. Considerăm $\Omega = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$, care este un domeniu compact elementar.



Frontiera sa este reuniunea a două suprafețe având imaginile:

$$(S) = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$$

$$(S_1) = \{(x, y, 0), x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

Aplicând formula Gauss-Ostrogradski, obținem:

$$\iint_S x^3dydz + y^3dzdx + x^3dxdy + \iint_{S_1} x^3dydz + y^3dzdx + x^3dxdy =$$

$$= \iiint_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$$

Dar $\iint_{S_1} x^3 dydz + y^3 dzdx + x^3 dxdy = 0$ şi

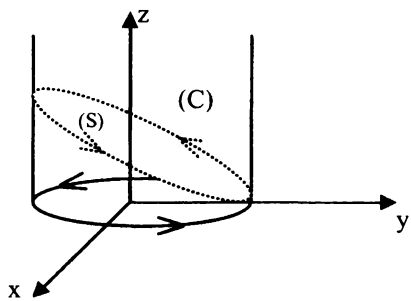
$$\iiint_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz = 3 \iiint_{[0,R]x[0,\frac{\pi}{2}]x[0,2\pi]} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi =$$

$$= 3 \cdot \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^R \cdot (-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{6\pi R^5}{5}.$$

Rezultă că $\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + x^3 dxdy = \frac{6\pi R^5}{5} - 0 = \frac{6\pi R^5}{5}$

Exercițiul 12.3.6. Să se calculeze folosind formula lui Stokes circulația câmpului $\vec{V} = (y - x)\,\vec{i} + (z - x)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$ pe elipsa (C) obținută prin intersecția cilindrului $x^2 + y^2 = 1$ cu planul $y + z = 1$, parcursă în sens direct.

Soluție.



În acest caz rot $\vec{V} = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$. Alegem drept suprafață ce are bordura orientată (C), porțiunea din planul y + z = 1 , limitată de cilindrul $x^2 + y^2 = 1$.

Ea are ecuația $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - v, (u,v) \in D \end{cases}$, unde D = {(u, v) | $u^2 + v^2 \leq 1$}.

Din formula lui Stokes rezultă :

$$\oint_{(C)} (y - x)dx + (z - x)dy + (x - y)dz = \iint_{(D)} -2(dydz + dzdx + dxdy)$$

$$= -2 \iint_{(D)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} dudv = -4\text{aria}(D) = -4\pi$$

Exercițiul 12.3.7. Să se demonstreze că:

$$\vec{V}(x, y, z) = xyz \cdot \vec{i} + xyz \cdot \vec{j} - \frac{1}{2} z^2(x + y)\vec{k}$$

este solenoidal în $\mathbf{R}^3$.

Soluție. Punând $V_1(x, y, z) = xyz$, $V_2(x, y, z) = xyz$, $V_3(x, y, z) = -\frac{1}{2} z^2(x + y)$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, avem

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = yz + xy - z(x + y) = 0$$

Prin urmare $\vec{V}$ este solenoidal în $\mathbf{R}^3$.

Exercițiul 12.3.8. Se consideră câmpul vectorial exprimat în coordonate sferice prin:

$$\vec{V} = \frac{1}{r^2} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{\sin\theta} \cdot \vec{e}_\theta - e^{r\theta} \cdot \vec{e}_\varphi \text{ , } r > 0, \theta \in (0, \pi), \varphi \in [0, 2\pi]$$

Să se demonstreze că acest câmp este solenoidal.

Soluţie. Fie $V_1^*(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2}$, $V_2^*(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sin\theta}$, $V_3^*(r, \theta, \varphi) = -e^{r\theta}$, componentele câmpului vectorial dat. Parametrii lui Lamé fiind:

$R_r = \| \vec{r}_r \| = 1$, $R_\theta = \| \vec{r}_\theta \| = r$, $R_\varphi = \| \vec{r}_\varphi \| = r \sin\theta$, avem:

$$\operatorname{div} \vec{V}^* =$$

$$\frac{1}{R_r R_\theta R_\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(R_\theta R_\varphi V_1^*) + \frac{\partial}{\partial \theta}(R_r R_\varphi V_2^*) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(R_r R_\theta V_3^*)\right]$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\theta \cdot \frac{1}{r^2}) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin\theta \cdot \frac{1}{\sin\theta}) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(-re^{r\theta})\right]$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(-re^{r\theta})\right] = 0,$$

pentru orice $(r, \theta, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$. Deci câmpul este solenoidal.

Exerciţiul 12.3.9. Să se demonstreze că fluxul câmpului vectorial:

$$\vec{V}(x, y, z) = xy^2 \cdot \vec{i} + x^2y \cdot \vec{j} - z(x^2 + y^2)\vec{k}, \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

prin forntiera închisă a oricărui domeniu compact elementar din $\mathbf{R}^3$ este nul

Soluţie. Notând $V_1(x, y, z) = xy^2$, $V_2(x, y, z) = x^2y$, $V_3(x, y, z) = -z(x^2 + y^2)$, avem:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = y^2 + x^2 - (x^2 + y^2) = 0$$

pentru orice $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Deci câmpul $\vec{V}$ este solenoidal în $\mathbf{R}^3$. Din teorema 12.1.4.1. rezultă afirmaţia.

Exerciţiul 12.3.10. Să se demonstreze că:

$$\vec{V}(x, y, z) = xy^2 \cdot \vec{i} + x^2y \cdot \vec{j} - z(x^2 + y^2)\vec{k}, \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

este un câmp de rotori în $\mathbf{R}^3$ şi să se determine un potenţial vector pentru $\vec{V}$.

Soluţie. Câmpul $\vec{V}$ este solenoidal în $\mathbf{R}^3$ (exerciţiul 12.3.9). Din teorema 12.1.4.1. rezultă că $\vec{V}$ este, local, un câmp de rotori în $\mathbf{R}^3$. Căutăm un potenţial vector de o formă particulară:

$$\vec{W}(x, y, z) = W_1(x, y, z)\cdot \vec{i} + W_2(x, y, z)\cdot \vec{j}$$

Egalitatea rot $\vec{W} = \vec{V}$ conduce la :

$$W_1(x, y, z) = \int_{z_0}^{z} V_2(x, y, t)dt + \varphi_1(x, y) = \int_{z_0}^{z} x^2 y dt + \varphi_1(x, y) =$$

$$= x^2y(z - z_0) + \varphi_1(x, y)$$

$$W_2(x, y, z) = -\int_{z_0}^{z} V_1(x, y, t)dt + \varphi_2(x, y) = -\int_{z_0}^{z} xy^2 dt + \varphi_2(x, y) =$$

$$= -xy^2(z - z_0) + \varphi_2(x, y)$$

unde $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}^3$ este fixat, arbitrar, iar φ_1 şi φ_2 se aleg astfel ca:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = V_3(x, y, z_0),$$

adica:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -z_0(x^2 + y^2)$$

Putem alege, de exemplu, $\varphi_1(x, y) = z_0\frac{y^3}{3}$, $\varphi_2(x, y) = -z_0\frac{x^3}{3}$

Deci: $W_1(x, y, z) = x^2yz - x^2yz_0 + z_0\frac{y^3}{3} = x^2yz - yz_0(x^2 - \frac{y^2}{3})$

$$W_2(x, y, z) = -xy^2z + xy^2z_0 - z_0\frac{x^3}{3} = -xy^2z + xz_0(y^2 - \frac{x^2}{3})$$

iar câmpul vectorial $\vec{W}(x, y, z) = W_1(x, y, z)\cdot \vec{i} + W_2(x, y, z)\cdot \vec{j}$ este un potențial vector pentru $\vec{V}$ într-o sferă cu centrul în (x_0, y_0, z_0). Se verifică imediat că egalitatea rot $\vec{W} = \vec{V}$ este adevărată în întreg $\mathbf{R}^3$, deci $\vec{W}$ este un potențial vector pentru $\vec{V}$ în $\mathbf{R}^3$. Cum $\mathbf{R}^3$ este mulțime deschisă și stelată, rezultă că orice alt potențial vector pentru $\vec{V}$ este de forma $\vec{W}$ + grad U, unde U este un câmp scalar de clasă C^2 în $\mathbf{R}^3$.

Exercițiul 12.3.11. Să se determine fluxul câmpului vectorial:

$$\vec{V}(x, y, z) = xy^2\cdot \vec{i} + x^2y\cdot \vec{j} - z(x^2 + y^2)\vec{k}$$

prin fața exterioară a emisferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.

Soluție. Câmpul $\vec{V}$ este solenoidal în $\mathbf{R}^3$(vezi exercițiul 12.3.9.), iar $\vec{W}(x, y, z) = x^2yz\cdot \vec{i} - xy^2z\cdot \vec{j}$ este un potențial vector pentru $\vec{V}$ (în exercițiul 12.3.10 am considerat $z_0 = 0$). Ținând seama de observația 12.1.4.3. fluxul căutat este:

$$\iint_S \vec{V}\cdot \vec{n}\, dS = \int_C \vec{W}\cdot d\vec{r}$$

unde (S) este emisfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, iar (C) este bordura sa orientată, adică cercul $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ orientat pozitiv. Ecuațiile parametrice ale cercului (C) fiind $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$, $t \in [0, 2\pi]$, rezultă:

$$\int_C \vec{W}\cdot d\vec{r} = \int_C x^2yzdx - xy^2zdy = 0,$$

prin urmare fluxul căutat este nul.

Exercițiul 12.3.12. Să se calculeze:

$$\iint_S -dydz + dzdx + dxdy$$

unde (S) este fața inferioară a porțiunii de paraboloid $z = x^2 + (y - 1)^2$ cuprinsă în cilindrul $x^2 + y^2 = 1$.

Soluție. Este evident că $\vec{V}(x, y, z) = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ este solenoidal în $\mathbf{R}^3$ și că, de exemplu $\vec{W}(x, y, z) = z\cdot\vec{i} + (x + z)\cdot\vec{j}$ este un potențial vector al său. Notând cu (C) bordura orientată a suprafeței (S), aceasta este curba dată de:

$$\begin{cases} z = x^2 + (y-1)^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

parcursă în sens invers trigonometric, când se privește din origine și are reprezentarea parametrică:

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = \cos^2 t + (\sin t - 1)^2,\ t \in [0, 2\pi]$$

Ținând seama de observația 12.1.4.3. avem:

$$\iint_S -dydz + dzdx + dxdy = \int_C zdx + (x + z)dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} [-(2 - 2\sin t)\sin t + (2 + \cos t - 2\sin t)\cos t]dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2\sin t + \sin^2 t + 1 + 2\cos t - \sin 2t)dt =$$

$$= \left(2\cos t + 2\sin t + \frac{\cos 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt + 2\pi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} + 2\pi = \pi + 2\pi = 3\pi$$

12.4. Exerciţii propuse

Exerciţiul 12.4.1. Să se calculeze:

a) $\iint_{(S)} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, (S) fiind faţa exterioară a sferei $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$;

b) $\iint_{(S)} \frac{dydz}{3x} + \frac{dzdx}{2y} + \frac{dxdy}{2z}$, (S) fiind faţa interioară a elipsoidului $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$;

c) $\iint_{(S)} (x^2 + y^2) zdxdy$, (S) fiind faţa superioară a porţiunii de pe paraboloidul $z = x^2 + y^2$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 1$;

d) $\iint_S yzdydz + xzdzdx + xydxdy$, (S) fiind faţa exterioară a tetraedrului determinat de planele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

R. a) $\frac{256\pi}{3}$, b) $-\frac{124\pi}{9}$, c) $\frac{25\pi}{84}$, d) 0.

Exerciţiul 12.4.2. Să se calculeze fluxul câmpului de vectori:

a) $\vec{V} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$ prin faţa exterioară închisă a conului $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le h$;

b) $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ prin suprafaţa $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 1$.

R. a) 0, b) π

Erercitiul 12.4.3. Să se calculeze cu ajutorul formulei Green-Riemann următoarele integrale curbilinii:

a) $\oint_{FrD} e^{x^2+y^2}(-ydx+xdy)$, unde D = {(x, y), $x^2 + y^2 \le 1$};

b) $\oint_{FrD}(xy-y)dx+(xy+x)dy$, unde D = $\left\{(x,y),\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$;

c) $\oint_{FrD}(x-y)dx+dy$, unde D = {(x, y), $x^2 + y^2 \le 2x$, $y \ge 0$};

R. a) $2\pi e$; b) $2\pi ab$; c) $\frac{\pi}{2}$

Exercițiul 12.4.4. Să se calculeze direct și aplicând formula Green-Riemann:

a) $\oint_{FrD}(x+y)dx-(x-y)dy$, unde D = {(x, y), $x^2 - 1 \le y \le 3x - 3$};

b) $\oint_{FrD}(2x+3y^2)dx+(x^2+y)dy$, unde D = [-1, 1] x [-1, 1]

R. a) $-\frac{1}{3}$; b) 0.

Exercițiul 12.4.5. Folosind integrala curbilinie, să se calculeze:

a) aria figurii mărginită de curba $\begin{cases} x = a(2\cos t - \sin 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t), t \in [0, 2\pi] \end{cases}$

b) aria figurii mărginită de curba de ecuație $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (lemniscata lui Bernoulli)

c) aria figurii mărginită de curba de ecuație $x = a \sin 2\varphi \cos \varphi$, $y = a \sin 2\varphi \sin \varphi$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

R. a) $4\pi a^2$; b) $2a^2$; c) $\frac{\pi a^2}{8}$.

Indicații. b) ecuațiile parametrice ale curbei sunt $x = a\sqrt{\cos 2t}\cdot\cos t$;
$y = a\sqrt{\cos 2t}\cdot\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$.

Exercițiul 12.4.6. Folosind formula Gauss-Ostrogradski, să se calculeze următoarele integrale de suprafață de al doilea tip:

a) $\iint_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$ pe fața exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

b) $\iint_S x^3y^2dydz + x^2y^3dzdx + 3zdxdy$ pe fața exterioară a frontierei domeniului mărginit de paraboloizii $z = x^2 + y^2$, $z = 6 - x^2 - y^2$;

c) $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ pe fața exterioară a piramidei mărginită de planele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$.

R. a) $\frac{12\pi}{5}a^5$; b) 27π; c) $\frac{a^3}{2}$.

Exercițiul 12.4.7. Arătați că volumul corpului compact elementar, mărginit de suprafața S este, $V = \frac{1}{3}\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$.

R. Se aplică formula Gauss-Ostrogradski. Se poate observa că

$$V = \iint_S V_1(x,y,z)dydz + V_2(x,y,z)dzdx + V_3(x,y,z)dxdy,$$

dacă $\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = 1$.

Exercițiul 12.4.8. Să se calculeze I = $\iint_S xzdydz + xz^3dzdx + yzdxdy$ pe fața exterioară a suprafeței $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, z \geq 0$.

Indicație. Sc completează S astfel încât să se obțină frontiera jumătății de elipsoid $\left\{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0\right\}$, se aplică formula Gauss-Ostrogradski și se arată că integrala este 0 pe porțiunea de frontieră din planul xOy.

R. I = $\frac{\pi abc^2}{8}$.

Exercițiul 12.4.9. Folosind formula lui Stokes, să se calculeze următoarele integrale curbilinii:

a) $\oint_{(C)}(x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$, unde (C) este intersecția sferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ cu planul x + y + z = a, parcursă odată în sens direct față de Ox

b) $\oint_{(C)}(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$, unde (C) este conturul $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, x + y+ z = a

c) $\oint_{(C)}x^2y^3dx+dy+zdz$, unde (C) este circumferința $x^2 + y^2 = R^2$, z = 0

d) $\oint_{(C)}zxdx+xydy+yzdz$, unde (C) este curba de intersecție a cilindrului $x^2 + y^2 = R^2$ cu planele de coordpnate și cu planul z = h, h > 0, situată în primul octan.

R. a) 0; b) 0; c) $-\frac{\pi}{8}R^6$; d) $\frac{1}{2}Rh(R+h)$

Exercițiul 12.4.10. Să se demonstreze că :

$$\vec{V}(x, y, z) = 2xy\,\vec{i} - y^2\,\vec{j} + \vec{k}$$

este solenoidal în $\mathbf{R}^3$.

Exercițiul 12.4.11. Se consideră câmpul vectorial exprimat în coordonate cilindrice prin:

$$\vec{V}^*(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \cdot \vec{e}_r + \theta \cdot \vec{e}_\theta - \frac{z}{r}\,\vec{e}_z\,,\ r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi],\ z \in \mathbf{R}$$

Să se demonstreze că acest câmp este solenoidal.

Exercițiul 12.4.12. Să se demonstreze că fluxul câmpului vectorial:

$$\vec{V}(x, y, z) = 2xy\,\vec{i} - y^2\,\vec{j} + \vec{k}\,,\ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

prin frontiera închisă a oricărui domeniu compact elementar din $\mathbf{R}^3$ este nul.

Exercițiul 12.4.13. Să se demonstreze că:

$$\vec{V}(x, y, z) = 2xy\,\vec{i} - y^2\,\vec{j} + \vec{k}\,,\ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

este un camp de rotori în $\mathbf{R}^3$ și să se determine un potențial vector pentru $\vec{V}$.

R. $\vec{W}(x, y, z) = z(1 - yz)\,\vec{i} + 2x(1 - yz)\,\vec{j}$ + grad U, unde U este un câmp scalar de clasă C^2 în $\mathbf{R}^3$.

Exercițiul 12.4.14. Se consideră câmpul vectorial exprimat în coordonate cilindrice prin:

$$\vec{V}^*(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \cdot \vec{e}_r + \theta \cdot \vec{e}_\theta - \frac{z}{r}\,\vec{e}_z\,,\ r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi],\ z \in \mathbf{R}$$

Să se determine un potențial vector pentru acest câmp.

R. $\vec{W}^* = (\theta z + r)\vec{e}_r + \frac{1-z}{r} \cdot \vec{e}_\theta$ + grad U^*, unde U^* este un câmp scalar, exprimat în coordonate cilindrice, de clasă C^2 peo mulţime deschisă şi stelată ce nu conţine originea.

Exerciţiul 12.4.15. Să se determine fluxul câmpului vectorial

$$\vec{V}(x, y, z) = 2xy\,\vec{i} - y^2\,\vec{j} + \vec{k},$$

prin faţa exterioară a emisferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.
R. π

Exerciţiul 12.4.16. Să se exprime câmpul vectorial:

$$\vec{V}(x, y, z) = \frac{y\,\vec{i} - x\,\vec{j}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}},\ x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$$

în coordonate sferice şi apoi să se determine div $\vec{V}$ şi un potenţial vector pentru $\vec{V}$.
R. $\vec{V}^*(r, \theta, z) = -\sin\theta \cdot \vec{e}_\varphi$; div $\vec{V}^* = 0$; $\vec{W}^*(r, \theta, z) = -r\cos\theta \cdot \vec{e}_r$.

Exerciţiul 12.4.17. Să se exprime câmpul vectorial:

$$\vec{V}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}\,(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} - 3z\,\vec{k}),$$

în coordonate cilindrice, apoi să se determine div $\vec{V}$ şi un potenţial vector pentru $\vec{V}$.
R. $\vec{V}^*(r, \theta, z) = r^2\vec{e}_r - 3rz\vec{e}_z$; div $\vec{V}^* = 0$; $\vec{W}^*(r, \theta, z) = r \cdot \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r} - r^2 z\right) \cdot \vec{e}_\theta$, $r > 0$

BIBLIOGRAFIE

[1] Bălan T.: *Capitole de matematici aplicate - Analiză Fourier*, Editura Universitaria, Craiova, 1998

[2] Bălan V.: *Analyse Mathématique*, tome 1, Editura Universitaria, Craiova, 2003

[3] Bucur I.: *Curs de analiză matematică*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2000

[4] Colojoară I.: *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983

[5] Diamandescu A.: *Analiză matematică*, vol I, II, Editura Universitaria, Craiova, 2005

[6] Diamandescu A.: *Culegere de probleme de Analiză Matematică*, Editura Universitaria, Craiova, 2007

[7] Duda I., Trandafir Rodica: *Elemente de analiză matematică* (exerciţii şi probleme) Editura FRM, Bucureşti, 2002

[8] Flondor P., Stănăşilă O.: *Lecţii de analiză matematică şi exerciţii rezolvate*, Editura ALL, Bucureşti, 1998

[9] Megan M.: *Analiză matematică*, vol I, II, Editura Mirton, Timişoara, 1999

[10] Niculescu C.: *Calculul integral al funcţiilor de mai multe variabile. Teorie şi aplicaţii*, Editura Universitaria, Craiova, 2002

[11] Păltineanu G.: *Analiză matematică*, Editura AGIR, Bucureşti, 2002

[12] Popescu M., Popescu P.: *Algebră liniară şi geometrie analitică*, Editura Universitaria, Craiova, 2002

[13] Precupanu A.: *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, Iaşi, 1998

[14] Predoi M.: *Analiză Matematică*, Editura Universitaria, Craiova 1994

[15] Predoi M., Bălan T.: *Mathematical Analysis*, vol I, II, Editura Universitaria, Craiova, 2005

[16] Predoi M., Constantinescu D., Racilă M.: *Teme de calcul diferenţial*, Editura Sitech, Craiova, 2003

[17] Predoi M., Constantinescu D., Racilă M.: *Teme de calcul integral*, Editura Sitech, Craiova, 2003

[18] Stănăşilă O.: *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1981

[19] Stănescu M. M.: *Elemente de teorie a spaţiilor vectoriale*, Editura Universitaria, Craiova, 2005

[20] Udrişte C.: *Linii de camp*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1988

[21] Vladimirescu I., Munteanu F.: *Algebră liniară, geometrie analitică şi geometrie diferenţială*, Editura Universitaria, Craiova, 2007

ISBN 978-606-510-233-0